2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ３０ 日現在

機関番号：１７６０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ０４９６３

研究課題名（和文）漸近解構築に基づく反応拡散系の解の形と動きの解明

研究課題名（英文）Study on the profiles and dynamics of solutions to reaction-diffusion systems through the asymptotic analysis

研究代表者

飯田　雅人（Iida, Masato）

宮崎大学・工学部・教授

研究者番号：００２４２２６４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：　反応拡散系は、生成・消滅・相互作用するモノたちの集団の密度分布が拡散によって移り変わる様子を記述する数理モデルである。反応拡散系の解として、密度分布の様々な動的パターンが現れることが、計算機シミュレーションによって予想されている。然るに、実在することが証明された動的パターンは未だ少なく、その点で反応拡散系の理論は開発途上にあると云える。
　本研究では、角張った形状の動的パターン、及び各段差が異なる速度で移動する階段型形状の動的パターンが反応拡散系に発生する機構を理論的に明らかにするため、これらの特徴を抽出した漸近解と呼ばれる近似解の構成と挙動の解析に役立つ理論的基盤を整備した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　反応拡散系の解として出現することが数値的に予想されている動的パターンの存在を個別に証明する際に理論的な基盤となる「反応拡散近似」について、総合報告論文として出版することにより、反応拡散系に係る今後の漸近解析の発展に寄与できる。
　副次的な結果として一例を示すと、常識的には近接相互作用である拡散とは何ら関係がないと思える遠隔相互作用さえも、拡散場での近接相互作用を記述する反応拡散系の特異極限として得られることが理論的に明らかになった。この事実は、反応拡散系を用いて解明できる未知の分野の裾野が意外と広大なことを暗示しているのでなかろうか。

研究成果の概要（英文）：Reaction-diffusion systems are mathematical models describing the dynamics of the population densities of particles which appear, disappear and interact each other. Numerical simulations suggest that various dynamic patterns of the population densities appear in reaction-diffusion systems. However, this suggestion has not been proved completely, and thus the theories on reaction-diffusion systems have not been well developed yet.
 Our objectives is to clarify how the following two dynamic patterns are generated in reaction-diffusion systems: the pattern with a corner layer; the stairs-like pattern every step of which moves forward with a different speed from each other. In the present investigation we prepare some basic theories which will be useful for the construction and analysis of asymptotic solutions which approximate to those two patterns.

研究分野：非線形微分方程式、反応拡散系

キーワード：非線形解析　反応拡散系　漸近解

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

半線形放物型偏微分方程式系として拡散項と（微分を含まない）反応項だけから成る反応拡散系では、数多くの数値実験に基づき、様々な特徴的な形状を持つ解が現れることが予想されている。それらの予想に対する理論的な検証に関しては、狭い範囲内で解の値が急激に変位する内部遷移層や境界層を持つ解や、一定波形が一定速度で移動する様子を表す進行波解などのように、理論的に確立しているものもあるが、理論的には充分解明されていない形状の解が少なくない。角遷移層を持つ解と、数理生態学での複数種個体群の多段階侵入に相当する解は、そのような未解明の解の重要な例である。

角遷移層とは、(解の値そのものではなく)解の勾配が急激に変化する狭い範囲のことを指す。そこを遠目に観察すれば、解の空間的な形状が文字通り角張っているように見える。角遷移層は、反応項のうち複数種間の相互作用を表す部分が巨大な係数を持つ場合にしばしば現れる。特に巨大係数を無限大級にした特異極限においては、解の角遷移層の形状が本当に尖った角になり、そのとき解は（適当な意味で）ある自由境界問題をみたすことが形式的に知られている。この形式的事実への理論的アプローチの第１歩として、[DHMP][HIMN1][HIMN2]によって、数理生態学における競争関係にある複数種個体群の数理モデルである特定の反応拡散系に対し、相互作用項の巨大係数を無限大へ飛ばすときに反応拡散系の解が自由境界問題の弱解へ収束することが L^2 位相に基づく枠組で示されている。然るに、角遷移層が発生する理論的な根拠については、未だ一般的には解明されていない。

一方、[MN]及びその参考文献等では、スカラー型反応拡散方程式において空間次元 N が N=1 の場合に、異なる速度を持つ複数の進行波形の衝突（または追突）・消滅を具現化する形状とダイナミクスを持つ全域解（時刻変数 t と空間変数 x に関して－∞から＋∞に至る全範囲で定義できる特解）が理論的に構成されている。これら諸研究に触発され、研究代表者・研究分担者らは[ILN]において、互いに協調関係にある多種 Lotka-Volterra 型反応拡散系の未開地侵入問題に対し、空間次元が N=1 の場合に、解の初期状態が単一波形なのに、時間経過とともに単一波形が「互いに異なる移動速度を持つ複数の波形」に分離しながら空間的に拡がっていく様子を、漸近解を構成することにより、理論的に示唆した。生物モデルとして[ILN]の結果を解釈してみると、次のようになる：

各種の個体群がそれぞれ異なる速度で未開地へ侵入していくとともに、先行侵入種は後続侵入種が新たに参入する度に（後続種との協調関係によって）増殖が段階的に増強され、結果として、各種の個体数密度の分布形状は階段型に近くなる；

特に、先行種は後続種よりも階段型形状の段数が多くなる（最後から侵入する種の個体数密度の分布形状は１段のみの単一波形になる)。

このような侵入状況を多段階侵入と呼ぶことにする。ただし、[ILN]で調べた協調拡散系は、残念ながら証明手法に依拠する理由のため、すべての種の拡散係数が一致している系に限られていた。また、Fisher-KPP 方程式に対する[AW]の結果を考慮すると、Lotka-Volterra 型協調関係は空間次元 N とは無関係なのだから、この反応拡散系（協調拡散系）では、N=1 でなくても多段階侵入が起きるものと思われる。また、協調関係にある複数種個体群に限らず、互いに競争関係にある２種個体群の Lotka-Volterra 型反応拡散系（２種の競争拡散系）においても、特定な係数値に対しては、２段階侵入と呼べる形状とダイナミクスを持つ解の存在が数値実験で示唆されている。このように、反応拡散系における多段階進入型動的パターンを持つ解についても、その発生の理論的な根拠は未だ一般的には解明されていない。

２．研究の目的

反応拡散系に対する数値実験で既に知られている特徴的な形状をした諸々の特解が発生する理論的な根拠を明らかにするための第一歩として、次の２つの特解に焦点を絞り、漸近解の理論的な構築と挙動の解析の基礎を固める。

（１）　特定のパラメータの値が大きく拡散効果が相対的・局所的に弱まる状況での反応拡散系においてしばしば見られる、角遷移層を持つ解

（２）　複数種個体群を記述する反応拡散系などにおいて見られる、多段階侵入型動的パターンを持つ解

３．研究の方法

（１）　競争関係にある２種個体群の数理モデルである反応拡散系については、角遷移層の存在の理論的確立に向けた解析がある程度進んでいる（[DHMP][HIMN1][INY]）。それらに対して形式的な「接合漸近展開」に基づいて構成される漸近解の挙動を解析し、「反応拡散近似」の観点から再検討し、角遷移層を発生させる機構を明らかにする。角遷移層が数値的に観測されている他の反応拡散系に対しても、同様な機構だけで角遷移層の発生を説明できるのか、他の新たな機構が係っているのか、接合漸近展開に基づき形式的に構成される漸近解の挙動を解析することで、様々な角遷移層の発生機構に共通する特徴を整理・検討する。その結果をヒントにして、一般の反応拡散系における角遷移層型形状の解の存在・非存在を理論的に検討する糸口を探す。

（２）　複数の進行波を適切に貼り合わせて多段階侵入型漸近解を構成することを目指す。そ

の漸近解では、構成単位である各進行波が互いに貼り合せ可能な状況が長時間保たれるため、少なくとも各進行波の形状・速度が互いに整合している必要がある。そこで、様々な進行波の形状・速度を詳しく解析し、多段階進入型漸近解の構成単位になり得る進行波の候補を広く収集しておく。一方、このように構築される漸近解では、貼り合せ部分で近似解としての精度が落ちやすいため、貼り合せ部分の挙動がうまく制御されることを示す手段として、[MN][ILN]で構成したように、漸近解を適度に補正した優解・劣解の構成を試みる。

４．研究成果

（１）　複数の反応拡散系に対して角遷移層の発生機構を形式的漸近解を基に調べ、それらに共通する特徴を整理・検討した。この作業を通して、角遷移層に限らず特徴的形状を持つ様々な解の漸近解析において「反応拡散近似」を効果的に活用するヒントが複数得られ、以下の成果に結実した：
２成分の非可逆化学反応系に対し、反応速度の係数が充分大きくなった特異極限が、２成分の反応速度の比の濃度依存様態に応じて様々な界面ダイナミクスを生み出すことを、接合漸近展開によって形式的に明らかにし（学会発表①～③）、それらのうち典型的な複数の濃度依存様態に応じた界面ダイナミクスについては、理論的な導出に成功した（雑誌論文③）；
拡散場での近接相互作用を記述する反応拡散系の特異極限として、常識的には拡散に伴う散逸的現象とは思えないような遠隔相互作用を表す方程式や波動方程式も得られることが明らかになった（雑誌論文⑤、学会発表⑤）。

これらの成果を踏まえ、角遷移層などの特徴的な形状を持つ解を調べる強力な手法である「反応拡散近似」について、これからの漸近解析で留意すべき種々のアイデアを整理して総合講演を行い（学会発表④⑩）、総合報告論文として出版した（雑誌論文①）。

（２）　複数の進行波を適切に貼り合わせた多段階侵入型漸近解を構成する準備として、漸近解の構成単位となり得る様々な進行波の形状・速度が満たすべき特徴を整理・検討した。この検討作業がヒントとなり、副次的な結果として、関連する反応拡散系の進行波に対する以下の成果が得られた：
進行波の特異極限と見なせる平面内の軸対称な「進行曲線」（形状を保ったまま軸方向に一定速度で進む曲線）が一意に存在するための必要十分条件を導出した（雑誌論文⑥）；
興奮場を記述する反応拡散系の特異極限に見られるいくつかの動的パターンに対する理論的な裏付けとして、空間が２次元の場合に V 字型進行波の存在・一意性・安定性を確立し（雑誌論文④）、空間が多次元の場合に 進行スポット・パターン解の存在や 形状の速度依存性 及び平面波との漸近的な関係を示し（雑誌論文⑦）、様々な形状の進行波の特徴をまとめた（学会発表⑥～⑨）。

漸近解を適度に補正した優解・劣解の構成方法を種々検討する中で、副次的に、Allen-Cahn 方程式に対する優解・劣解の巧妙な構成方法のアイデアが得られた。その結果、多段階進入型動的パターンとは真逆的な動的パターンを持つ Allen-Cahn 方程式の特解として、限りなく遠い昔に各段差が３つまたは４つの異なる速度で進んでいた多段階形状波形がある時刻で消滅または１段階波形に退化してしまう状況を表す解の構成に成功した（雑誌論文②）。

現状では多段階侵入型漸近解の構成には至ってないが、ここで得られた諸知見は、多段階侵入型漸近解を構成する糸口になるものと期待され、さらに将来的には反応拡散系の大域アトラクタの構造解明へ向けた重要な一歩となるであろう。

＜引用文献＞

[AW] D. G. Aronson、H. F. Weinberger: Multidimensional nonlinear diffusion arising in populations genetics、Adv. in Math.、Vol. 30、1978、pp. 33-76
[DHMP] E. N. Dancer、D. Hilhorst、M. Mimura、L. A. Peletier: Spatial segregation limit of a competition-diffusion system、European J. Appl. Math.、Vol. 10、1999、pp. 97-115
[HIMN1] D. Hilhorst、M. Iida、M. Mimura、H. Ninomiya: A competition-diffusion system approximation to the classical two-phase Stefan problem、Japan J. Indust. Appl. Math.、Vol. 18、2001、pp. 161-180
[MN] Y. Morita、H. Ninomiya: Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations、J. Dynam. Differential Equations、Vol. 18、2006、pp. 841-861
[INY] M. Iida、K. Nakashima、E. Yanagida: On certain one-dimensional elliptic systems under different growth conditions at respective infinities、Proceedings of MSJ-IRI "Asymptotic Analysis and Singularities", Advanced Studies in Pure Mathematics (Math. Soc. Japan)、Vol. 47、2007、pp. 565-572
[HIMN2] D. Hilhorst、M. Iida、M. Mimura、H. Ninomiya: Relative compactness in L^p of solutions of some 2m components competition-diffusion systems、Discrete and Continuous Dynamical Systems、Vol. 21、2008、pp. 233-244
[ILN] M. Iida、R. Lui、H. Ninomiya: Stacked fronts for cooperative systems with equal diffusion coefficients、SIAM J. Math. Anal.、Vol. 43、2011、pp. 1369-1389

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）

① M. Iida、H. Ninomiya、H. Yamamoto： A review on reaction-diffusion approximation、Journal of Elliptic and Parabolic Equations、査読有、Vol. 4、2018、pp. 565－600
DOI: 10.1007/s41808-018-0029-y

② Y.-Y. Chen、J.-S. Guo、H. Ninomiya、C.-H. Yao： Entire solutions originating from monotone fronts to the Allen-Cahn equation、Physica D: Nonlinear Phenomena、査読有、Vol. 378-379、2018、pp. 1－19
DOI：10.1016/j.physd.2018.04.003

③ M. Iida、H. Monobe、H. Murakawa、H. Ninomiya：Vanishing, moving and immovable interfaces in fast reaction limits、Journal of Differential Equations、査読有、Vol. 263、2017、pp. 2715－2735
DOI: 10.1016/j.jde.2017.04.009

④ H. Ninomiya、C.-H. Wu： Traveling Curved Waves in Two-Dimensional Excitable Media、SIAM Journal on Mathematical Analysis、査読有、Vol. 49、2017、pp. 777－817
DOI: 10.1137/16M1064040

⑤ H. Ninomiya、Y. Tanaka、H. Yamamoto： Reaction, diffusion and non-local interaction、Journal of Mathematical Biology、査読有、Vol. 75、2017、pp. 1203－1233
DOI: 10.1007/s00285-017-1113-x

⑥ H. Monobe、H. Ninomiya： Traveling wave solutions with convex domains for a free boundary problem、Discrete and continuous dynamical systems Ser. A、査読有、Vol. 37、2017、pp. 905－914
DOI: 10.3934/dcds.2017037 (HM:20635809, HN:26287024)

⑦ Y.-Y. Chen、H. Ninomiya、R. Taguchi： Traveling spots on multi-dimensional excitable media、Journal of Elliptic and Parabolic Equations、査読有、Vol. 1、2015、pp. 281－305
DOI: 10.1007/BF03377382

〔学会発表〕（計 10 件）

① 飯田雅人：急速反応極限の接合漸近展開による再考、四ツ谷晶二先生ご退職記念研究集会、2019

② 飯田雅人：急速反応極限の接合漸近展開による再考、2018 夏の偏微分方程式セミナー、2018

③ 飯田雅人：急速反応極限の接合漸近展開による再考、明治非線型数理セミナー one day workshop、2018

④ 飯田雅人：反応拡散近似への誘い(1),(2)、RIMS 共同研究（公開型）「非線形現象と反応拡散方程式」、2017

⑤ Hirokazu Ninomiya：Reaction-diffusion approximations of non-local evolutionary equation and wave equation、International Conference on Elliptic and Parabolic Problems、2017

⑥ Hirokazu Ninomiya：Dynamics of waves in excitable media、日本数理生物学会, S10 New mathematical approaches for understanding of biological phenomena、2017

⑦ Hirokazu Ninomiya：Obstacle-induced spiral in two-dimensional excitable media、RIMS 共同研究「ミクロな振る舞いと集団的パターン形成に係る階層的構造の解明」、2016

⑧ Hirokazu Ninomiya：Layered Interface Systems and its Dynamics、11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications、2016

⑨ Hirokazu Ninomiya：Obstacle-induced spiral formation in excitable media and ventricular fibrillation、ALGORITMY, Conference on Scientific Computing、2016

⑩ 飯田雅人：反応拡散近似とは～基本的アイデアと可能性～、応用数学勉強会 2015@芝浦工大、2015

６．研究組織

研究分担者
研究分担者氏名：　二宮　広和
ローマ字氏名：　(NINOMIYA, hirokazu)
所属研究機関名：　明治大学
部局名：　総合数理学部

職名：　専任教授
研究者番号（8 桁）：　90251610

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。