

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04965

研究課題名(和文) 平坦でない空間における楕円型偏微分方程式の解構造の解明

研究課題名(英文) Investigation on the structure of solutions to elliptic partial differential equations on a non-flat space

研究代表者

壁谷 喜継 (Kabeya, Yoshitsugu)

大阪府立大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70252757

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：球面に代表されるような、通常の三平方の定理が成り立たない領域(「平坦でない領域」という)での非線形楕円型偏微分方程式の解構造の解明を目標とした。平坦でない場合は、解構造の観点で、通常の領域での問題とどのような違いがあるのか解明することが主な目的である。

手始めに球面での帽子状領域での非線形楕円型偏微分方程式の解構造を調べ、平坦である場合での分岐点付近の解構造の違いを明らかにした。

また、平坦であっても方程式に逆二次の挙動をするポテンシャル項が付く線形放物型方程式の定常解の構造と時間大域的挙動を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平坦でない空間での楕円型方程式の解構造の解明は、特に、球面上の偏微分方程式の解構造に関して、球面上のラプラス作用素の固有値の分布状況・多重度とユークリッド空間上の固有値の分布状況・多重度並びに解構造とは異なることを示した。このことは、地球上での大気循環の変動による気象変動や、大洋表面の温度分布変化など、記述する方程式がこの研究で扱ったものとは異なるが、地球規模の現象の解析の基礎研究としての意義がある。これらの基礎研究は、近い将来、現象の解析への応用として役立つことがあると期待できる。

研究成果の概要(英文)：I planned to investigate the structure of solutions on non-flat domains, on which the usual Pythagorean theorem does not hold and whose typical example is a sphere. The main aim of this research is to clarify the differences of the structures of solutions between on non-flat domains and on flat ones. First I investigated the structure of solutions to a nonlinear elliptic equation on a spherical cap and showed that the structure of solutions near bifurcating points is different from the flat case. Also, I investigated a linear parabolic equation having an inverse-square potential and showed the structure of stationary solutions and the large-time behavior of the solution to the parabolic equation.

研究分野：函数方程式

キーワード：楕円型偏微分方程式 分岐理論 球面 Legendre の陪関数 逆二次のポテンシャル

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

応募時点(平成26年)での研究の学術的背景は以下の通りである。

(1) ユークリッド空間上の領域での非線形楕円型偏微分方程式の研究は、球状星団の重力場の方程式など、20世紀初頭から研究が続けられてきており、1971年の Ambrosetti and Rabinowitz による現代的変分法の確立、1983年の Brezis and Nirenberg による、Sobolev 臨界指数の場合の解明、1985年の Ding and Ni を端緒とする球対称解の構造決定など、現在では非常によく解明されていると言ってよい状況である。一方、球面を代表とする平坦でない空間の領域においても、解構造に大きな違いはないと考えられていた。しかし、解構造の大きな違いが認識されたのが1998年の Bandle and Preletier の論文で、方程式は同じであるが、解の存在・非存在の状況がユークリッド空間と異なることが示されてからである。また、球面とともにもう一つの平坦でない空間の代表である双曲空間上においても、同年の Bandle, Brillard and Flucher の論文から、改めて問題意識が生まれてきた。彼らの仕事に触発されて、2008年には、Mancini and Sandeep による正值解の分類、減衰評価などの結果が得られてきており、ヨーロッパでは活発に研究されている対象となっている。しかし、双方の場合を統一的に扱うような理論は未だ整備されていない。少なくとも、一変数のみに依存する解の満たす常微分方程式の解析を統一的に扱うためには、上述の Ding and Ni の結果を発展させた、1993年、1996年の柳田英二氏と四ッ谷晶二氏の結果が適用できることがわかってきた。幾何学的な応用について述べてはいないが、2002年の柳田英二氏と四ッ谷晶二氏、および応募者の結果も適用できることがわかってきた。

(2) 球面上、もしくは双曲空間上の楕円型方程式は、立体射影を用いてユークリッド空間上の重み付き楕円型方程式として解析するのがよく行われてきたが、分岐解の分岐点の位置を調べるには、重みのために解析がしにくい状況にある。そのため、ここでは立体射影を行わず、関数解析が生まれる前に行われていた特殊関数を援用する方法を採用。球面、双曲空間とも鍵となる特殊関数は、Legendre の陪関数であり、19世紀には非常によく研究されていて、その性質はほぼ解明されている。Legendre の陪関数を用いて、分岐点の位置を特定するために解く必要のある「超球微分方程式」と呼ばれる常微分方程式の解が表示される。球面、双曲空間ともその解の性質から、分岐点の位置を特定することが可能となる。Legendre の陪関数の性質を用いることは、2010年の、Bandle 氏、二宮広和氏と応募者の論文に述べていたが、さらに詳細な解析ができ、また双曲空間上の問題でも、本質的には Legendre の陪関数の性質で分岐点の位置が特定できそうであることがわかってきた。

(3) 双曲空間においては、2012年の Bandle 氏と応募者の論文で解の構造をある程度明らかにしており、また、特異解については、2014年の Wu, Chern, Chen 3氏と応募者により非線形の指数が Joseph and Lundgren の指数より大きい場合に解明できた。

これらを踏まえて、統一的に、かつより精密な解構造の解明への準備はできていると考えることができる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は以下の通りである。

(1) 球面上の領域(球面全体を含む)におけるスカラーフィールド型方程式の正則な正值解の分岐について、緯度一変数だけでなく経度依存性も込めたすべての分岐解の構造を解明する。とくに領域が、球面全体をほぼ覆う場合と球面全体の類似点と異なる点を明らかにする。また、境界条件が解構造に及ぼす影響、例えば Dirichlet 境界値問題と Neumann 境界値問題において、

解構造がそれぞれどのようなようになるかを明確にする。

(2) 球面全体での特異解の存在条件とその性質について調べる。特に非線形のべき指数と特異解の存在条件について解明する。

(3) 双曲空間上の領域(全空間を含む)におけるスカラーフィールド型方程式の正則な正值解の分岐構造をしらべ、球面との類似性と異なる点を調べ、統一的な理論を構築する。

(4) 以上を踏まえ、対称性はあるが、平坦でない空間でのスカラーフィールド型方程式に対する解構造を統一的に解明する。

(5) 線形楕円型偏微分方程式の解が定常解となる線形放物型方程式の解の挙動について、楕円型方程式の解の性質を調べることで解明する。

### 3. 研究の方法

年度を問わず、以下のことを基本的に実施した。

新刊書籍を購入して最新の情報を調査するとともに、国内外の研究協力者を訪問して討論することで研究を進める。また、初年度にはコンピュータと数式処理ソフトを更新して、複雑な計算を精度よく数値計算させ、理論の構築に役立て、数値計算を基に理論の構築を行った。

以下、各年度について述べていく。

平成 27 年度: この年度は、「研究目的」の欄に記載した(1)について、集中して研究を行った。このために、Kodai Mathematical Journal に掲載決定となった、大阪府立大学・川上竜樹講師(当時; 現龍谷大学教授), 大阪市立大学・小坂篤志研究員(現佛教大学講師), 明治大学・二宮広和教授らとの共同研究論文の手法を発展させ、球面をほぼ覆う領域でのスカラーフィールド型方程式の分岐解の存在と解構造について、数値計算を援用しつつ解明を進めた。数値計算を実行するにあたり、現有のコンピュータは旧式となっているため更新し、さらに最新の数式処理ソフトウェアも導入して数値計算が滞りなく行えるような体勢を築いた。また、最新の研究動向の知識を得るため、微分方程式関連書籍を 20 冊選び購入した。同様に、国内外の研究者との意見交換の場として、北海道大学、東北大学、早稲田大学、京都大学数理解析研究所、九州大学などで開催される研究集会に出席し、最新の結果・手法の情報収集にあたった。

一方で、学内の連携研究員である松永秀章教授、山岡直人准教授、川上竜樹講師とは、教員セミナーを頻繁に開催して、意見交換と討論を行った。また、国内研究協力者である東北大学・石毛和弘教授、明治大学・二宮広和教授を訪問、あるいは招聘することで、意見交換と討論を行った。さらに、国外研究協力者である台湾国立中央大学・陳建隆(Chern, Jann-Long)教授、スイス・バーゼル大学 Catherine Bandle 教授らとは、電子メールもしくはスカイプでの意見交換を頻繁に行うことを基本としたが、一度は訪問して集中的に研究を進めた。

平成 28 年度: 球面上での特異解、特に「北極」と「南極」で解の絶対値が無大となるものの存在・非存在について検討した。このためには、Wu, Chen, Chern 教授らと応募者らが 2014 年に発表した双曲空間上の特異解の解明方法が役に立つと考える。そのため、平成 27 年度で整備したコンピュータとソフトウェアを駆使して数値計算を行う。また、平成 27 年度と同様、偏微分方程式関連書籍を 30 冊選び購入するとともに、国内の研究集会に出席した。引き続き、連携研究者と討論するとともに、研究協力者を訪問して集中的に議論した。なお、課題の部分的な解決に関しては国際研究集会で発表を行った。

平成 29 年度: 平成 28 年度と同様な研究方法を採った。即ち、微分方程式関連書籍を 20 冊選び購入するとともに、国内の研究集会に出席する。解決された部分の課題に関しては、国際研究集

会で発表した。

平成 30 年度：完成年度であるので，統一的な取り扱いの見地から，一般論の構築を試みたが完成には至らなかった。ここまでの成果を国内外での研究集会で発表を行った。

本来は平成 30 年度で終わりであったが，1 年の延長申請を行った。

平成 31 年度：残された課題の解決に向けての研究を行った。

#### 4. 研究成果

研究成果は主に次の 3 つに分類される。

##### (1) 球面上での非線形楕円型偏微分方程式に対する正則な分岐解構造の解明

球面上の帽子状領域でのスカラーフィールド型非線形楕円型方程式の正則解（古典解）構造は，緯度 1 変数のみに依存する場合については，明治大学の二宮広和氏，University of Basel の Catherine Bandle 氏らとの共同研究（2010 年，Communications on Pure and Applied Analysis に掲載）で解明できたが，経度の依存がある場合は未解明であった。まずは，境界条件を Neumann 条件として経度依存も込めた形の解構造の解明に注力した。帽子状領域を球面に近づけると，球面状での Laplace-Beltrami 作用素の固有値同士が近づき，極限としては球面全体でのそれらに一致することをまず解明した。この解析には，Legendre の陪関数と Gauss の超幾何関数に関する精密な計算が必要であった。これらの固有値がスカラーフィールド型非線形楕円型方程式の定数解からの分岐点の情報を与える。これらの固有値は一般に多重性があるため，多重性のある場合の分岐理論を精査して，どのように非定数解が分岐するかを解明した。この成果は，2019 年に日本数学会函数方程式分科会が刊行する学術誌 Funkcialaj Ekvacioj に掲載された。Dirichlet 問題に関する経度依存も込めた問題は論文投稿に向けて現在執筆中である。

##### (2) 球面上での非線形楕円型偏微分方程式に対する特異解の存在の解明。

上記(1)の成果においては，正則な解に限定したが，偏微分方程式には一般に，正規解以外にも 1 点で特異点をもつ特異解が存在することもよく知られている。そこで，球面上での非線形楕円型方程式に関して，緯度 1 変数のみに特異解が存在するかどうかを研究の主眼に据えた。緯度 1 変数のみに依存する場合，方程式は常微分方程式に帰着されるが，北極と南極に相当する点で方程式に特異性が発生する。この特異性への対処がまず必要である。また，非線形べきの指数が Joseph-Lundgren 指数と呼ばれるものより大きいときには，正則解が互いに交差しない状況が起こることが知られており，正則解の初期値を無限大とした極限として特異解を得ることができた。この結果は，龍谷大学の四ツ谷晶二氏，韓国の Hanbat 大学の Soohyun Bae 氏，台湾の中央大学の陳建隆（Chern Jann-Long）氏らとの共著で，速報として京都大学数理解析研究所講究録に掲載された。非線形べきの制限を Sobolev 臨界指数よりも大きい場合へと拡張した結果も得られたが，この補助金の期間での印刷公表には間に合わなかったが，現在投稿に向けて執筆中である。

##### (3) ポテンシャル付きの線形放物型方程式に対する解の時間大域的挙動の解明

ここでは，ポテンシャル項の挙動が原点と無限遠点でちょうど逆二次の振る舞いをする場合を研究対象とした。Hardy の不等式からしても，逆二次の挙動は臨界的な挙動であることが知られており，これよりも特異性が弱い場合は既存の理論で解明ができる。放物型方程式の時間大域的挙動を検討するに当たり，定常解の構造を調べる必要がある。これは，ポテンシャル付きの線形

楕円型偏微分方程式の解を解明することになる。逆二次のポテンシャルの場合、定常解の原点と空間無限大での挙動は、逆二次のポテンシャルの係数で決まってしまう。この定常解の挙動をもとに逆二次のポテンシャルの特異性を取り除く変数変換を行うと、球対称解の範疇であれば、取り除く作業に応じて決まる「正の数（自然数とは限らない）の次元」の楕円型方程式を解くことで解明できることをまず示した。さらに、ポテンシャル付きの楕円型偏微分作用素は、古典的な Simon の意味での臨界作用素と劣臨界作用素の分類を逆二次の場合にまで拡張して分類し、しかもそれぞれで解の挙動が異なることを解明した。さらに、これらの定常解の空間無限大での挙動を元にして、熱核の精密な評価を行い、放物型方程式に対する解の時間大域的な挙動を解明した。この成果は、東京大学の石毛和弘教授とフランスの University of Bordeaux の El Maati Ouhabaz 教授との共同研究として、国際学術誌の Proceedings of the London Mathematical Society に 2017 年に掲載された。

さらに、上記論文を元に、同じ方程式の初期値問題を考察し、その解の最大点の挙動の解明を、同じく石毛和弘氏と東京大学博士課程の向井農人氏とともにを行い、その成果は、国際学術誌の Applicable Analysis に 2019 年に掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kazuhiro Ishige, Yoshitsugu Kabeya, Asato Mukai	4. 巻 98
2. 論文標題 Hot spots of solutions to the heat equation with inverse square potential	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 1843, 1861
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2018.1466284	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Catherine Bandle, Yoshitsugu Kabeya, Hirokazu Ninomiya	4. 巻 62
2. 論文標題 Bifurcating solutions of a nonlinear elliptic Neumann problem on large spherical caps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 285, 317
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 K. Ishige, Y. Kabeya, E. Ouhabaz	4. 巻 115
2. 論文標題 The heat kernel of a Schroedinger operator with inverse square potential	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 381, 410
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms.12041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Sohhyun Bae, Jann-Long Chern, Yoshitsugu Kabeya and Shoji Yotsutani	4. 巻 1933
2. 論文標題 Positive Singular solutions to a nonlinear elliptic equation on the unit sphere	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 107, 121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshitsugu Kabeya	4. 巻 1974
2. 論文標題 Solutions to the equation of the scalar-field type on a large spherical cap	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 27, 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Structures of a nonlinear elliptic equation with an $A_2$ weight and related topics
3. 学会等名 First UK-Japan PDE Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Eigenvalues of the Laplace-Bltrami operator on a Zonal Domain in the Unit Sphere
3. 学会等名 12th AIMS Conference SS47 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Bifurcation Diagrams of a Nonlinear Elliptic Equation on a spherical cap
3. 学会等名 12th AIMS Conference SS62 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Structure of a nonlinear elliptic equation with an inverse square potential
3. 学会等名 International Workshop on Nonlinear PDEs 2018 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y. Kabeya
2. 発表標題 Properties of positive Schroedinger operators and related topics
3. 学会等名 International Conference on Elliptic and Parabolic Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Kabeya
2. 発表標題 Linear Elliptic Equations with the inverse square potential and the related Schroedinger semigroup
3. 学会等名 Equadiff 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Difference equation and the related Schrodinger operator
3. 学会等名 The 22nd International Conference on Difference Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Positive Schrodinger operators with the inverse square potential and related topics
3. 学会等名 Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Positive Schrodinger operators with the inverse square potential and related topics
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Existence of an asymmetric solution to a nonlinear elliptic equation on the whole sphere
3. 学会等名 2015 International Workshop on PDE and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yoshitsugu Kabeya
2. 発表標題 Singular solutions to a nonlinear elliptic equation on the whole unit sphere
3. 学会等名 RIMS Workshop on Qualitative theory of ordinary differential equations in real domains (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~kabeya>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	石毛 和弘  (Ishige Kazuhiro)		
研究協力者	二宮 広和  (Ninomkiya Hirokazu)		
研究協力者	バンドレ カトリーヌ  (Bandle Catherine)		
研究協力者	陳 建隆  (Chern Jann-Long)		
研究協力者	松永 秀章  (Matsunaga Hideaki)  (40332960)		

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	山岡 直人 (Yamaoka Naoto) (90433789)		
研究協力者	川上 竜樹 (Kawakami Tatsuki) (20546147)		