2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：３４３０４

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ０４９７０

研究課題名（和文）準線形シュレディンガー方程式におけるラグランジュ乗数問題と安定性解析への応用

研究課題名（英文）Lagrange multiplier problem for some quasilinear Schrodinger equation and its application to stability analysis

研究代表者

渡辺　達也（WATANABE, Tatsuya）

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：６０５４９７４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、プラズマ物理学に現れる準線形シュレディンガー方程式に関する研究を行った。この方程式は超流動薄膜内を伝播する波動関数の挙動を記述し、ポリマーフィルムコーティングに応用される。本研究の成果は、定常状態を記述する楕円型偏微分方程式における、基底状態解の一意性およびパラメータに関する漸近挙動を解析したことである。特に、パラメータの制限なしに一意性問題を解決し、非線形項の指数の大小による漸近挙動の完全な分類を行った。
　さらに、ゲージ理論に現れるシュレディンガー・マックスウェル方程式の定在波解の安定性解析や、他の物理モデルの研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の問題意識は物理学者による考察を数学的に厳密化することであり、応用面でも大きな意義があると考えている。定在波解は様々な数理モデルにおいて現れ、その安定性解析は重要な研究課題の一つであるが、厳密な解析が行われていない数理モデルは数多く残されている。本研究が目的とするラグランジュ乗数のパラメータ依存性問題に対する解析手法の確立は、定在波解の安定性解析の研究において新たな試みであり、理論面からも応用面からも重要であると考えている。

研究成果の概要（英文）：In this research, I have studied a quasilinear Schrodinger equation arising in plasma physics. This equation describes behavior of wave functions spreading through “superfluid films”, which are applied to polymer film coatings. The main results of this research were to analyze the uniqueness and the asymptotic behavior with respect to a physical parameter of ground states for an elliptic partial differential equation which appears as a stationary problem. Especially we were able to obtain the uniqueness without any restriction on the parameter, and performed a complete classification of asymptotic behavior depending on the size of an exponent of the nonlinear term.
 I have also performed the stability analysis of standing waves for the Schrodinger-Maxwell system which appears in the Gauge theory, and investigated several other physical models.

研究分野：変分的手法による楕円型偏微分方程式の解析

キーワード：非線形解析　変分問題　楕円型偏微分方程式　安定性解析

１．研究開始当初の背景

　本研究ではプラズマポリマーコーディング等に応用される準線形シュレディンガー方程式について考察する。特に、定在波解の安定性について興味がある。
　非線形シュレディンガー方程式における定在波解の安定性については盛んに研究されている。この研究で扱う準線形方程式においては、準線形項が定在波解を安定化させるという結果が物理学者の Brizhik らの数値解析によって得られている。彼らの主張の数学的厳密化について、部分的な結果は得られているが、完全な解決は未だにされていない。その要因は、定常問題のエネルギー最小解の一意性・非退化性が完全に分かっていないことに加え、付随する制限付き変分問題のラグランジュ乗数のパラメータ依存性が分かっていないことにある。
　定在波解の安定性解析の手法は確立されており、カギとなるのは付随する制限付き変分問題のラグランジュ乗数のパラメータ依存性である。最も単純な非線形シュレディンガー方程式においては、スケーリングを行うことでラグランジュ乗数のパラメータ依存性が容易に分かる。しかし、ここで扱う準線形方程式の場合は、良い斉次性を持たない。したがってスケーリングのみでは証明が完成しないので、さらなる議論が必要となる。さらに、安定性解析においてはエネルギー最小解の一意性・非退化性を利用するが、この研究で扱う問題においては一意性・非退化性の成立が完全に分かっていない。
　これまでは、静岡大学の足達慎二氏と共にエネルギー最小解の一意性と非退化性についての研究を行ってきた。しかし、これまでの結果ではパラメータに制限が必要で、エネルギー最小解が存在するパラメータ範囲全体での一意性と非退化性は証明できていない。もし、一意性に関する閾値が存在するならば、その値を特定することは応用上も重要となる。
　また、斉次性を持たない制限付き変分問題は、近年盛んに研究されている他の物理モデルにおいても現れる。これらの物理モデルに対するラグランジュ乗数のパラメータ依存性問題を考察することも、定在波解の安定性解析を発展させる上で重要であると考えられる。

２．研究の目的

　本研究ではプラズマポリマーコーディング等に応用される準線形シュレディンガー方程式について考察する。定常問題として得られる準線形楕円型方程式において、制限付き変分問題を考察した際に現れるラグランジュ乗数のパラメータに関する依存性（単調性・一意性）を解析することが本研究の目的である。定在波解の安定性にラグランジュ乗数の性質が深く関わることは古くから知られており、本研究を通じて未解決問題であった、準線形項の安定化効果の数学的な厳密化を目指す。同時に、斉次性を持たない制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性問題に対する解析手法を確立し、様々な物理モデルにおける定在波解の安定性解析への応用を試みる。具体的な目的は以下の通りである。

(1) 準線形方程式におけるエネルギー最小解の一意性・非退化性の分類を完成させること
(2) 準線形方程式におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析すること
(3) 様々な制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析すること

３．研究の方法

(1) 準線形方程式におけるエネルギー最小解の一意性・非退化性の分類を完成させること
　この研究では、エネルギー最小解の一意性・非退化性に対する指数・パラメータによる分類を行う。具体的には、これまでの研究で残されていた、非線形項がソボレフ臨界指数の場合の漸近挙動の解析と、パラメータの値によらない一意性を考察する。前者については、これまで行ってきた爆発解析による一様有界性を用いた、スケーリングの議論による詳細な漸近的プロファイルの解析を行えばよい。後者については、これまでの研究によってパラメータが小さい場合と大きい場合の一意性・非退化性が得られているので、分岐理論もしくは写像度を用いて中間の範囲をカバーできればよい。

(2) 準線形方程式におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析すること
　この研究では、対応する制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析する。これまでの先行研究によって、この研究で扱う準線形方程式における定在波解の安定性を決定する非線形項の臨界指数は分かっており、その指数は通常の非線形シュレディンガー方程式における指数よりも大きい。もしも準線形方程式におけるラグランジュ乗数のパラメータに関する単調性が成り立てば、準線形項が定在波解を安定化させていることを意味する。先に述べたように方程式は斉次性を持たないので、スケーリングの議論のみではラグランジュ乗数のパラメータ依存性問題を解決できない。ヒントとなるのは、分岐理論を用いたポテンシャル付き半線形シュレディンガー方程式の定在波解の安定性の証明であると考える。
　また、準線形項の安定化効果を調べるために、力学系理論を適用するというアプローチも考えられる。

(3) 様々な制限付き変分問題におけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析すること
この研究では、以下に挙げる様々な物理モデルにおけるラグランジュ乗数のパラメータ依存性を考察する。これらの物理モデルは近年盛んに研究されているが、そのどれもが斉次性を持たない制限付き変分問題である。

・シュレディンガー・ポワソン方程式
・ボルン・インフェルトの非線形電磁気学における非線形クライン・ゴルドン方程式
・擬相対論的ハートリー方程式

これらの方程式における定在波解の安定性を解析することも目的の一つであるが、いずれかの問題でラグランジュ乗数のパラメータ依存性が確立出来れば、その手法は他の問題に対しても応用できると期待される。

本研究で扱う準線形シュレディンガー方程式に対する元々の問題意識は、準線形項による定在波解の安定化を数学的に証明することである。定常問題の解析が本研究の主な目的であるが、初期値問題の可解性にも未解決問題が残されているので、時間発展の問題にも今後は取り組んでいく。

４．研究成果

(1) 準線形シュレディンガー方程式の研究
本研究は静岡大学の足達慎二氏・東京工業大学の柴田将敬氏と共同で行った。この研究に関する成果は大きく分けると 2 種類ある。

①エネルギー最小解の一意性・非退化性に関する結果
これまで得られていた一意性・非退化性の結果では、パラメータに制限が必要であったが、この制限を完全に取り除くことが出来た。この結果によって、エネルギー最小解が存在する非線形項の指数の範囲・パラメータの範囲全体で一意性と非退化性が成り立つことが分かり、本研究の最終目的に大きく前進した。

当初の予想では、パラメータが中間的な範囲にある場合の解析は、分岐理論等を使えばよいと考えていたが、実際には以前の研究で用いていた常微分方程式論による方法が適用できた。そのポイントは、準線形方程式を半線形方程式に変換する「双対変分構造」を与える写像の性質である。変換後の半線形方程式に対して、既存の一意性・非退化性の結果を適用することが基本的なアイデアであるが、そのためには変換を与える写像の性質を用いる必要がある。以前の研究では、その写像が満たすある不等式を用いていた。その結果、必要な条件の成立を保証するためにはパラメータに制限が必要であった。本研究では、これまでの研究で知られていた不等式を改良したことにより、パラメータの制限を外すことができた。

また、非退化性に関しては、既存の結果だけでは十分ではなかったため、半線形楕円型微分方程式における正値解の一意性の証明に立ち戻ることにした。その結果、既存の結果を大きく改良することが出来た。この研究では常微分方程式論による詳しい解析を行う必要があり、その研究成果は非常に評価された。実際、共同研究者の足達慎二氏は、この研究成果によって「日本数学会 関数方程式分科会 福原賞」を受賞した。

②エネルギー最小解の漸近挙動に関する結果
この研究では、エネルギー最小解のパラメータをゼロに近づけた場合の漸近挙動を考察した。その挙動は非線形項の指数がソボレフ臨界指数を超えるかどうかで大きく変わり、以前は臨界指数よりも小さい場合の結果を得ていた。

まず行ったのは非線形項の指数が臨界指数よりも大きい場合の考察である。この場合は以前の研究成果で極限方程式の解明と収束性までは分かっていた。本研究では極限方程式の正値解の一意性・非退化性を解析することによって、エネルギー最小解の漸近的一意性を得た。

次に考察したのは、非線形項の指数が臨界指数と等しい場合である。この場合、極限方程式がスケール不変性を持つため、漸近展開を１次の項まで調べるだけでは、極限の一意性が全く保証されない。しかし、漸近展開の 2 次の項を係数まで含めて精密に評価することによって、エネルギー最小解の詳しい漸近挙動を得ることが出来た。一連の結果により、エネルギー最小解の漸近挙動の分類が完成し、準線形項が漸近挙動にどのように影響するかが解明された。

本研究の目標であった、準線形方程式におけるエネルギー最小解の一意性・非退化性の分類は達成されたが、ラグランジュ乗数の解析の方は解決に至らなかった。本研究成果で得られたエネルギー最小解の一意性が第１ステップであり、これはクリア出来たが、２つ目のステップであるパラメータに関する単調性を示すための手法が足りなかった。現在ラグランジュ乗数法の証明に立ち戻ることや、他の問題におけるラグランジュ乗数の解析などを勉強中であり、何かしらのヒントが得られないかと考えている。

(2) マックスウェル方程式と相互作用した方程式の研究

本研究は、フランスのボルドー大学の Mathieu Colin 氏と共同で行った。この研究では、マックスウェル磁場と相互作用する粒子の運動を記述するシュレディンガー・マックスウェル方程式やクラインゴルドン・マックスウェル方程式を考察した。これらの方程式はゲージ理論において現れる方程式であり、相対論や宇宙論で重要な問題として知られる。これらの方程式において、定在波解の安定性が磁場との相互作用によってどのように変化するかに興味がある。

本研究では、初めに初期値問題の可解性を考察した。方程式を双曲型方程式系に変換して、エネルギー法によって局所解の一意存在を得た。この方法では初期値に高い微分可能性を課す必要があり、エネルギーが定義される関数のクラスでは解の局所存在が分かっていない。これを解決することが、今後の大きな課題の１つである。

次に、クラインゴルドン・マックスウェル方程式を考察し、エネルギー最小解の存在および付随する最小化問題におけるラグランジュ乗数を解析した。この問題ではスケーリングが機能したので、ラグランジュ乗数のパラメータ依存性問題が解決できた。

さらに、シュレディンガー・マックスウェル方程式における定常問題のエネルギー最小解の存在および定在波解の安定性に関する研究を行った。この問題においても付随する最小化問題に対するラグランジュ乗数のパラメータ依存性を解析して、非線形項の指数が特別な場合は、最小点集合の一意性および、その応用として定在波解の安定性を示すことが出来た。この研究によって、準線形方程式に対するラグランジュ乗数に対する解析手法の手がかりが得られた。それだけでなく、この研究成果は大きく評価され、掲載された学術雑誌の Highlight collection に選出された。

本研究は進展中であり、現在も Mathieu Colin 氏と共同研究を行っている。この研究で使用する手法は、他の物理モデルの多くにも適用可能であることが期待出来る。特にラグランジュ乗数の解析手法を確立出来れば、準線形シュレディンガー方程式の研究にも進展が得られると考えている。また、対応する２次元の問題の研究など、やるべき問題が残っているので、今後精力的に取り組んでいきたい。

(3) その他の研究

当初の予定にはなかったが、以下の研究に関する成果も得られた。

①準線形熱方程式の研究

この研究は、イタリアのサクロ・クローレ・カトリック大学の Marco Squassina 氏と共同で行った。本研究では(1)で扱った準線形シュレディンガー方程式の放物型方程式版を考察した。特に、時間大域解の存在や漸近挙動を解析した。カギは(1)の成果で得られたエネルギー最小解の一意性と非退化性であり、これによって半線形方程式との違いが見えるようになった。

②協力系反応拡散系の研究

この研究は、スペインのカルロス第３大学の Pablo Alvarez-Caudevilla 氏と共同で行った。本研究では、協力系反応拡散系の共存状態の存在を変分的手法で解析した。特に、相互作用を表す係数が非一様の場合に興味がある。その場合、そのままでは変分構造を持たず、方程式の変換が必要になる。本研究では、限定された場合に限っているが、変分法で共存状態の存在を示して、非一様性が存在・非存在のパラメータ範囲にどのような影響を与えるかを考察した。

③ボルン・インフェルト型準線形方程式の研究

この研究は、イタリアのバーリ工科大学の Alessio Pomponio 氏と共同で行った。本研究では、電磁気学に現れるボルン・インフェルト方程式の定常問題を考察する。その方程式は微分項に特異性があり、解を得ることは容易でない。そこで、方程式を近似する準線形方程式を考察し、解の存在を変分的手法で解析した。

④チャーン・サイモンズゲージ場と相互作用した準線形シュレディンガー方程式の研究

この研究は、イタリアのバーリ工科大学の Alessio Pomponio 氏・Pietro D'Avenia 氏と共同で行った。本研究では、(1)で考察した準線形シュレディンガー方程式とチャーン・サイモンズゲージ場を相互作用させた方程式を考察した。(2)の研究と同様に、ゲージ場と相互作用したシュレディンガー方程式における定在波解の安定性に興味があるが、空間２次元の場合を考察する手がかりとして、本研究を行った。現時点では、一部のパラメータ範囲における解の存在のみが得られており、詳しい解析は今後の課題として残されている。

以上のように、新たな共同研究者と共に様々な新規研究を開始した。これらの研究においても、未解決な問題は多くあり、今後の国際的な共同研究を進展させる良い機会が得られた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計９件）

① Alessio Pomponio and Tatsuya Watanabe, Some quasilinear elliptic equations involving multiple p-Laplacians, Indiana University Mathematics Journal, 67 (2018), pp. 2199-2224, 査読あり
DOI: 10.1512/iumj.2018.67.7523

② Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe, A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application, Acta Mathematica Scientia, 38B (2018), pp. 1-22, 査読あり
DOI: 10.1016/S0252-9602(18)30803-8

③ Mathieu Colin and Tatsuya Watanabe, On the existence of ground states for a nonlinear Klein-Gordon-Maxwell type system, Funkcialaj Ekvacioj, 61 (2018), pp. 1-14, 査読あり
DOI: 10.1619/fesi.61.1

④ Marco Squassina and Tatsuya Watanabe, Uniqueness of limit flow for a class of quasi-linear parabolic equations, Advances in Nonlinear Analysis, 6 (2017), pp. 243-276, 査読あり
DOI: 10.1515/anona-2016-0134

⑤ Mathieu Colin and Tatsuya Watanabe, Standing waves for the nonlinear Schrödinger equation coupled with the Maxwell equation, Nonlinearity, 30 (2017), pp. 1920-1947, 査読あり
DOI: 10.1088/1361-6544/aa6760

⑥ Pablo Álvarez-Caudevilla and Tatsuya Watanabe, On the existence of coexistence states for an advection-cooperative system with spatial heterogeneities, Nonlinear Analysis, 152 (2017), pp. 12-37, 査読あり
DOI: 10.1016/j.na.2016.12.009

⑦ Shinji Adachi, Masataka Shibata and Tatsuya Watanabe, Global uniqueness results for ground states for a class of quasilinear elliptic equations, Kodai Mathematical Journal, 40 (2017), pp. 117-142, 査読あり
https://projecteuclid.org/euclid.kmj/1490083227

⑧ Mathieu Colin and Tatsuya Watanabe, Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation coupled with the Maxwell equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 443 (2016), pp. 778-796, 査読あり
DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.05.057

⑨ Shinji Adachi and Tatsuya Watanabe, Asymptotic uniqueness of ground states for a class of quasilinear Schrödinger equations with H^1-supercritical exponent, Journal of Differential Equations, 260 (2016), pp. 3086-3118, 査読あり
DOI: 10.1016/j.jde.2015.10.029

〔学会発表〕（計８件）

① Tatsuya Watanabe, Stability issues for the nonlinear Schrödinger equation coupled with the Maxwell equation, 12th AIMS conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, National Taiwan University, Taipei, 2018 年７月８日

② 渡辺達也, Quasilinear elliptic equations of Born-Infeld type, 日本数学会 2017 年 秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年９月 11 日

③ Tatsuya Watanabe, Standing waves for the nonlinear Schrödinger equation coupled with the Maxwell equation, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, Georgia Center for Continuing Education, USA, 2017 年３月 29 日

④ 渡辺達也，Schrödinger Maxwell system に付随する最小化問題について，微分方程式の総合的研究，京都大学，2016 年 12 月 17 日

⑤ 渡辺達也，Orbital stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation coupled with the Maxwell equation，日本数学会 2016 年度秋季総合分科会，関西大学，2016 年 9 月 15 日

⑥ 渡辺達也，Uniqueness of limit flow for a class of quasi-linear parabolic equations，日本数学会 2016 年度秋季総合分科会，関西大学，2016 年 9 月 15 日

⑦ Tatsuya Watanabe，Uniqueness of limit flow for a class of quasi-linear parabolic equations，11th AIMS conference on Dynamical Systems，Differential Equations and Applications，Orland，Florida，USA，2016 年 7 月 3 日

⑧ Tatsuya Watanabe，Uniqueness and asymptotic behavior of ground states for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics，Workshop on quasilinear and nonlocal nonlinear Schrödinger equations，Wolfgang Pauli Institute (WPI)，Vienna，2015 年 10 月 2 日

６．研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：足達　慎二

ローマ字氏名：ADACHI，Shinji

所属研究機関名：静岡大学

部局名：工学部

職名：教授

研究者番号（8 桁）：40339685

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：柴田　将敬

ローマ字氏名：SHIBATA，Masataka

所属研究機関名：東京工業大学

部局名：理工学研究科

職名：助教

研究者番号：90359688

研究協力者氏名：柳下　浩紀

ローマ字氏名：YAGISHITA，Hiroki

所属研究機関名：京都産業大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号：80349828