

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04975

研究課題名(和文)閉路探索問題に基づいた曲面上のグラフの本型埋め込みに関する研究

研究課題名(英文)Book embedding of graphs on surfaces based on cycle finding problems

研究代表者

中本 敦浩 (Nakamoto, Atsuhiko)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：20314445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：与えられたグラフの本型埋め込みに要するページの数を求めることは、理論的にも応用的にも重要な問題である。本研究では、グラフの種数とページ数の関係を記述することを目標として研究に取り組んだ。そして、曲面上のグラフにある種の性質を満たす閉路を探索し、それを用いてある曲面に埋め込み可能なグラフの効率的な本型埋め込みアルゴリズムを構築することに成功した。特に、任意の向き付け可能閉曲面上の局所平面グラフのページ数と、射影平面的グラフのページ数の上界を、その連結度に応じて与えることができた。

研究成果の概要(英文)：For a given graph, determining the page number seems to be a very important problem in both theoretical and practical reasons. In this research, our goal is to describe a relation between genus and page number of graphs, and we have succeeded in giving an upper bound for the page number of a graph embeddable on a surface, finding a suitable cycle of a graph with a good property. In particular, we have been able to give an upper bound for the page number of locally planar graphs on any orientable surfaces, and that for projective-planar graphs with respect to their connectivity.

研究分野：離散数学, グラフ理論

キーワード：グラフ 曲面 本型埋め込み ページ数

1. 研究開始当初の背景

グラフ G の**本型埋め込み**とは、 G の頂点を直線 L (背表紙)の上に並べ、 G の各辺は L を境界とする半平面(ページ)に配置し、どの2辺も同一半平面では非交差となるように配置することである。本問題は、超大規模集積回路(VLSI)の設計などの応用も伴い、理学と工学の両分野で盛んに研究されてきた。さらに、今日では、生物情報学との関連も指摘されている。

グラフの本型埋め込みを考えると、簡単な事実として、次が確認できる：

- グラフ G が 1-ページ埋め込み可能 \Leftrightarrow G は外平面的
- グラフ G が 2-ページ埋め込み可能 \Leftrightarrow G はハミルトン閉路を持つ平面的グラフの部分グラフ

これらの事実により、グラフの本型埋め込みにおけるページ数とグラフの平面性には深い関係があることがわかる。そのため、平面的グラフのページ数の最大値の決定は当該分野における最重要問題であるが、現在に至ってもそれは未解決である。また、種数 g のグラフのページ数は $O(\sqrt{g})$ であることが証明されているが、それを示した論文ではその証明が十分ではないと感ぜられる。

2. 研究の目的

これまで、私は曲面上のグラフの局所変形、染色数、ハミルトン閉路に関する問題を扱ってきた。それらの研究において、私は、曲面上の二部グラフにはよい性質を満たすジグザグ閉路が存在することを示し、その手法から、「平面的二部グラフのページ数は2以下であること」の別証明、さらに、トーラス上の任意の二部グラフは5-ページ埋め込み可能であることを証明した。この研究は、最近、あまり進展がなかった分野に大きなブレークスルーを与えた。

一方、数年前、平面上や曲面上のグラフの

ハミルトン閉路に関する未解決問題が次々と解決された。その原動力はTutte閉路を探すための帰納的議論の進化と上述の二部グラフにおけるジグザグ閉路の存在である。そこで、これらの2つの道具により、トーラスの場合に引き続き、曲面上のグラフの本型埋め込みに関する様々な未解決問題を解決できるのではないかと考えた。

3. 研究の方法

まず、ジグザグ閉路を用いて、平面とトーラス以外の曲面上の二部グラフの本型埋め込みに関する問題に取り組んだ。その後、Yannakakisの定理の証明における問題点を洗い出し、それに関連する結果について情報を収集した。そして、Tutte閉路を用いて平面的グラフの本型埋め込みの定理の証明を試みた。さらに、曲面上のグラフのページ数と連結度との関係を考察し、局所平面グラフ、射影平面的グラフの本型埋め込みに関する研究に取り組んだ。

また、問題解決の様々な段階で得られたいろいろな結果を国内外の研究集会などで定期的に発表し、情報交換の機会を多く持つようにした。

4. 研究成果

平面的グラフのページ数に関する新たな結果は得られなかったが、以下の結果を得ることができた。

(1) 局所平面グラフのページ数

種数 g の閉曲面に埋め込まれたグラフのページ数は、 g の増加に関して単調増加することが知られているが、私たちは、どんな閉曲面においても、局所平面性を記述するrepresentativity という値がその種数に応じて十分に大きければ、ページ数が種数に依存しない絶対定数により抑えられることを証明することができた(定理1)。

定理 1. 任意の向き付け可能閉曲面 S に対して、次を満たす整数 $N(S)$ が存在する: S 上に埋め込まれたグラフ G の representativity が $N(S)$ 以上であれば、 G は 7 -ページ埋め込み可能である。

本結果は学術論文⑨として、査読付き国際誌に掲載された。

(2) 射影平面グラフのページ数

曲面上に埋め込まれたグラフから本型埋め込みを構成する際、曲面の向き付け可能性が重要な役割を果たすことがわかる。ゆえに、向き付け不可能閉曲面上のグラフのページ数に関する研究はほとんど行われていない。

(向き付け不可能曲面を扱った論文も見かけるが、その証明が正しいと断定できない状況である。) したがって、私たちは、向き付け不可能種数 1 の曲面の場合、すなわち、射影平面上に埋め込めるグラフのページ数に関する研究を行った。

その証明で私たちの提案する本型埋め込み構成アルゴリズムでは、与えられたグラフの中で最適な閉路を探し、それを用いて、本型埋め込みのページ数を大きく減らせることを示しており、この発見こそ、まさに本研究で私たちが提唱する「グラフ理論的アプローチ」による手法の改善である。

それらの手法により、次の事実を得た (定理 2)。

定理 2. 射影平面的グラフは 9 -ページ埋め込み可能である。

本研究は、学術論文⑤として査読付き国際誌に掲載された。

定理 2 で用いた手法は、種数 2 以上の向き付け不可能曲面では適用できない。したがって、定理 2 の拡張にはさらなるアイデアが必要であり、今後の課題となる。

(3) 射影平面的グラフの連結度とページ数の関係性

上の結果から射影平面グラフは 9 -ページ埋め込み可能であることが証明されたが、そのように大きいページ数が必要な例の存在は確認されていない。1 で述べたように、グラフが非平面的であれば、そのページ数は 3 以上であるが、それより大きいページ数を持つ射影平面グラフは存在するのだろうか。

私たちは、射影平面上の連結度が高いグラフにはハミルトン閉路などのきれいな性質を持つ閉路を比較的自由に探すことができることに着目し、連結度 3 , 4 , 5 の射影平面的グラフに対して、それぞれページ数の上界を与えることができた (定理 3)。

定理 3. 射影平面的グラフ G について、以下が成り立つ。

- (a) G は 7 -ページ埋め込みを持つ。
- (b) G が 4 -連結のとき、 G は 4 -ページ埋め込みを持つ。
- (c) G が 5 -連結のとき、 G は 3 -ページ埋め込みを持つ。

特に、(a) は定理 2 を改良していることがわかる。また、上述のように非平面的グラフのページ数は 3 以上であることがわかるため、(c) は最良の評価を与えている。

これらの結果を扱った論文は現在、投稿中である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① N. Matsumoto, A. Nakamoto, Generating 4-connected even triangulations on the sphere, *Discrete Math.* **338** (2015), 64—70. (査読付き)
- ② S. Bau, N. Matsumoto, A. Nakamoto and L. Zheng, Minor relation for quadrangulations on the sphere, *Graphs Combin.* **31** (2015), 2029—2036.

- (査読付き)
- ③ Y. Kawasaki, N. Matsumoto and A. Nakamoto, N-flips in 4-connected even triangulations on the sphere, *Graphs Combin.* **31** (2015), 1889—1904. (査読付き)
- ④ A. Nakamoto, K. Noguchi and K. Ozeki, Extension to even triangulations on surfaces, *SIAM J. Discrete Math.* **29** (2015), 2075—2081. (査読付き)
- ⑤ A. Nakamoto and T. Nozawa, Book embedding of projective-planar graphs, *Congr. Numer.* **225** (2015), 63—71. (査読付き)
- ⑥ A. Nakamoto, K. Noguchi and K. Ozeki, Cyclic 4-coloring of graphs on surfaces, *J. Graph Theory* **82** (2016), 265—278. (査読付き)
- ⑦ N. Matsumoto, A. Nakamoto and S. Yonekura, Minor relation for quadrangulations on the projective plane, *Discrete Applied Math.* **209** (2016), 296—302. (査読付き)
- ⑧ G. Fijavz and A. Nakamoto, Odd complete minors in even embeddings on surfaces, *Discrete Math.* **239** (2016), 165—178. (査読付き)
- ⑨ A. Nakamoto and T. Nozawa, Book embedding of orientable locally planar graphs, *Discrete Math.* **339** (2016), 2672—2679. (査読付き)
- ⑩ M. Kasai, N. Matsumoto and A. Nakamoto, Grunbaum coloring of triangulations on the projective plane, *Discrete Applied Math.* **215** (2016), 155—163. (査読付き)
- ⑪ A. Nakamoto, S. Negami, K. Ohba and Y. Suzuki, Looseness and independence number of triangulations on closed surfaces, *Discuss. Math. Graph Theory* **36** (2016), 545—554. (査読付き)
- ⑫ A. Nakamoto and K. Ozeki, Coloring of locally planar graphs on surfaces with one color class small, *Australasian J. Comb.* **67** (2017), 101—108. (査読付き)
- ⑬ M. Kasai, N. Matsumoto, A. Nakamoto, T. Nozawa, Y. Takiguchi and H. Seno, Note On 6-regular graphs on the Klein bottle, *Theory and Applications of Graphs* **4** (2017), Article 5. (査読付き)
- ⑭ Y. Kawasaki and A. Nakamoto, N-flips in even triangulations on the projective plane preserving chromatic number, *Yokohama Math. J.* **63** (2017), 75--89. (査読付き)
- ⑮ N. Matsumoto, A. Nakamoto and S. Yonekura, Quadrangulations on the projective plane with a $K_{3,4}$ -minor, *Yokohama Math. J.* **63** (2017), 117—129. (査読付き)
- [学会発表] (計 11 件)
- ① A. Nakamoto, Diagonal flips in plane graphs with triangular and quadrangular faces, The 8th Slovenian Conference, Kranjska Gora, Slovenia, 2015. 6.21—27.
- ② 招待講演, Atsuhiko Nakamoto, Reductions of even triangulations on surfaces, the 9th KIAS Combinatorics Workshop, Bloomvista in Yangpyeong (Seoul), 2015.9.11—13.
- ③ 招待講演, Atsuhiko Nakamoto, Domination in graphs on surfaces, Topology and Combinatorics seminar, Ajou university (Seoul), 2015.9.15.
- ④ 中本敦浩, 3-正則 2 部グラフの Splitter theorem に向けて, 第 27 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2015.11.13-14.

- ⑤ 中本敦浩, Y-Rotations in quadrangulations on the projective plane and rhombus tiling of a polygon, NAO-Asia 2016, 新潟大学, 2016.8.2.
- ⑥ 中本敦浩, 偶多角形のひし形分解と射影平面の四角形分割, 第27回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2016.11.11-12.
- ⑦ A. Nakamoto, Minor relation for quadrangulations on surfaces, ACCOTA 2016, Los Cabos, Baja California, Mexico, 2016.11.28.
- ⑧ 中本敦浩, 偶多角形のひし形分解と射影平面の四角形分割, 研究集会「直観幾何」, 熊本大学, 2017.2.11—12.
- ⑨ A. Nakamoto, Rhombus tilings of an even-sided polygon and projective quadrangulations, The Second Malta Conference in Graph Theory and Combinatorics, Qawra, Malta, 2017.6.27.
- ⑩ A. Nakamoto, Rhombus tilings of an even-sided polygon and projective quadrangulations, 5th International Combinatorics Conference (5ICC), Monash University, Melbourne, Australia, 2017.12.7.
- ⑪ 中本敦浩, 偶多角形のひし形分解と射影平面の四角形分割, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2017.12.14—16.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中本 敦浩 (Atsuhiko, Nakamoto)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：20314445

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし