

令和元年6月10日現在

機関番号：22701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04979

研究課題名（和文）グラフのラムゼー型問題解決に向けた新手法の開発

研究課題名（英文）A study for finding a new approach toward Ramsey-type problems in graphs

研究代表者

藤田 慎也（FUJITA, SHINYA）

横浜市立大学・データサイエンス学部・准教授

研究者番号：60424206

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：辺に色が塗られた辺着色グラフに対して、指定した構造をもつ単色の部分グラフや各辺の色がそれぞれ異なる虹色の部分グラフが存在することを保証する色数やグラフの頂点数といったパラメータについて最善の値を求めるグラフの極値問題をラムゼー型問題という。ラムゼー型問題のような最善の値を求める極値問題は一般に非常に難しい問題である。本研究では、ラムゼー型問題を解決するための新しいツールの開発を目指して様々な角度から研究を推進し、一定の成果を得ることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ラムゼー型問題の解決には単色の部分構造の解析が重要であるため、本研究を進める上でグラフの安全集合という新しい概念を提起して全く新しいアプローチから研究を推進した。その結果、ラムゼー型問題に留まらずグラフ理論の幅広い分野で適用可能な定理を多数得ることが出来た。グラフの安全集合の概念はグラフアルゴリズムの研究者グループの注目を惹き、本研究から国内外で活発に研究がなされるような波及効果を生み出すテーマを提供することが出来た。また、肝心のグラフのラムゼー型問題についても、辺着色グラフ上の分割問題に関する予想を提起し、その部分的解決を与えることで注目度の高い研究成果を与えることが出来た。

研究成果の概要（英文）：In this research project, I explored a new approach toward the Ramsey-type problems in graphs. As a result, I obtained some new results that could be useful tools to tackle some of the Ramsey-type problems in graphs.

研究分野：組合せ論、特にグラフ理論

キーワード：グラフの極値問題 ラムゼー数 ラムゼー型問題 グラフの辺着色 グラフの安全集合

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

完全グラフの辺を複数の色で着色したときに単色の部分グラフを見つけるという問題は、グラフのラムゼー数と深く関係していて、世界中の研究者によって近年盛んに研究が進められている。完全グラフ K_n の辺をどのように2色で着色しても単色の完全グラフ K_m が部分グラフとして含まれてしまうような n の最小値 $R(m)$ はラムゼー数と呼ばれている。ラムゼー数を決定する問題は大変難しく、驚くべきことに $m=5$ の場合でさえその正確な値は決定されていない ($43 \leq R(5) \leq 49$) であることが知られている。この問題は色数を k として一般化し、 K_n が含む単色の部分グラフとして求めるべきグラフを H とおくことにより、さらに次のようなラムゼー型問題として一般化出来る。

問題1 完全グラフ K_n の辺を k 色用いてどのように着色しても単色の H が K_n に部分グラフとして必ず含まれてしまうような n の最小値 $R(k,H)$ を決定せよ。

上で述べた $k=2, H=K_5$ の場合ですら未解決であるという状況から推察出来るように、おしなべて $R(k,H)$ を決定する問題は非常に難しい問題である。実際、 k や H をかなり限定した場合ですら完全決定は困難をきわめ、これまでにおけるこの問題の進展について一例を挙げると、Benevides, Skokan (J. Combin. Theory Ser. B 2009) により $k=3$, H が閉路 C_m で m が十分大きい偶数の場合に限ってその値が決定され、Li (J. Graph Theory 2009) により $R(k, C_5)$ の良い上界が与えられているといった状況である。得られている結果の多くが証明において確率を利用した手法に基づいていたり、頂点数が十分大きいときに効果的な Szemerédi の一様化補題を適用することでその部分的解決を与えている。これらの手法は一般化ラムゼー型問題に対して大変有効であるが、手法の特性から個々の問題を完全に解決することが難しいことと、グラフの内部構造を突き詰めてゆく構成的手法ではないことから、所望の結果が得られてもその後の研究に活かせるようなグラフの極値構造把握に対する知見を与えてくれないという2つの欠点があった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述の問題点を解消するラムゼー型問題に対する構成的証明手法の確立である。そのためには、辺着色されたグラフの単色部分グラフの構造を詳しく調べる必要があるため、様々な角度から研究を推進した。

3. 研究の方法

辺着色グラフの構造を調べる過程で単色部分グラフの構造を調べることになるので、本研究課題は部分構造にある制約をもつグラフの構造を解析する問題に帰着される。そのため、グラフの安全集合という概念を提起してグラフの内部構造を調べる方法や、グラフの連結度を突き詰めて考察する方法や、最長パスの交差に関するグラフの内部構造の把握といった方向の研究を推進し、様々な有用な結果を得ることが出来た。

4. 研究成果

グラフの安全集合に関する研究は多くの研究者たちの興味を惹き、彼らとの共同研究を推進することで多くの研究成果を得ることが出来た。具体的には、論文 [1] が当該成果に該当する。グラフの連結度に関する研究も大きく進展し、論文 [2] などの研究成果を得ることが出来た。最長パスの交差に関する研究についても一定の成果をあげることに成功し、論文 [3] などが当該成果に該当する。その他、辺着色グラフの有向グラフ版に関する考察による研究成果 (論文 [4]) や、辺着色グラフの構造解明を大きく進展させた研究成果 (論文 [5]) を得ることが出来た。本研究の目的にある、ラムゼー型問題に対する構成的証明手法の確立については、統一的な手法は得られなかったものの、グラフ理論の幅広い分野で適用可能な有用な定理が多数得られたことと、それらの定理が多くのラムゼー型問題に対しても適用可能であり、実際にいくつかの問題に対して大きな進展を与えられたことから、本研究課題の目標に対して一定の研究成果をあげることが出来たように思われる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 15 件)

論文タイトル : A new approach towards a conjecture on intersecting three longest paths

著者名 : Shinya Fujita, Michitaka Furuya, Reza Naserasr, Kenta Ozeki

雑誌名 : Journal of Combinatorics

巻 : 10

ページ : 221-234 (2019)

DOI : <http://dx.doi.org/10.4310/JOC.2019.v10.n2.a2>

査読あり / 国際共著

論文タイトル : On the weighted safe set problem on paths and cycles

著者名: Shinya Fujita, Tommy Jensen, Boram Park, Tadashi Sakuma
雑誌名: Journal of Combinatorial Optimization
巻: 37
ページ: 685-701 (2019)
DOI: doi.org/10.1007/s10878-018-0316-4
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Kernels by properly colored paths in arc-colored digraphs
著者名: Yandong Bai, Shinya Fujita, Shenggui Zhang
雑誌名: Discrete Mathematics
巻: 341
ページ: 1523-1533 (2018)
DOI: doi.org/10.1016/j.disc.2018.02.014
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Bounding the distance among longest paths in a connected graph
著者名: Jan Ekstein, Shinya Fujita, Adam Kabela, Jakub Teska
雑誌名: Discrete Mathematics
巻: 341
ページ: 1155-1159 (2018)
DOI: doi.org/10.1016/j.disc.2017.09.029
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Safe number and integrity of graphs
著者名: Shinya Fujita, Michitaka Furuya
雑誌名: Discrete Applied Mathematics
巻: 247
ページ: 398-406 (2018)
DOI: doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.074
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Color degree and monochromatic degree conditions for short properly colored cycles in edge-colored graphs
著者名: Shinya Fujita, Ruonan Li, Shenggui Zhang
雑誌名: Journal of Graph Theory
巻: 87
ページ: 362-373 (2018)
DOI: doi.org/10.1002/jgt.22163
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Highly connected subgraphs of graphs with given independence number
著者名: Shinya Fujita, Henry Liu, Amites Sarkar
雑誌名: European Journal of Combinatorics
巻: 70
ページ: 212-231 (2018)
DOI: doi.org/10.1016/j.ejc.2018.01.004
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Vertex-disjoint copies of K_1, t in K_1, r -free graphs.
著者名: Suyun Jiang, Shuya Chiba, Shinya Fujita, Jin Yan
雑誌名: Discrete Mathematics
巻: 340
ページ: 649-654 (2017)
DOI: 10.1016/j.disc.2016.11.034
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Safe sets, network majority on weighted trees
著者名: Ravindra Bapat, Shinya Fujita, Sylvain Legay, Yannis Manoussakis, Yasuko Matsui, Tadashi Sakuma, Zsolt Tuza
雑誌名: Networks
巻: 71
ページ: 81-92 (2017)
DOI: doi.org/10.1002/net.21794
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Decomposing edge-colored graphs under color degree constraints
著者名: Shinya Fujita, Ruonan Li, Guanghui Wang
雑誌名: Electronic Notes in Discrete Mathematics
巻: 61
ページ: 491-497 (2017)

DOI:doi.org/10.1016/j.endm.2017.06.078
査読あり / 国際共著/国際学会
論文タイトル: Safe set problem on graphs
著者名: Shinya Fujita, Gary MacGillivray, Tadashi Sakuma
雑誌名: Discrete Applied Mathematics
巻: 215
ページ: 106-111 (2016)
DOI:10.1016/j.dam.2016.07.020
査読あり / 国際共著
論文タイトル: Non-separating subgraphs in highly connected graphs
著者名: Shinya Fujita, Ken-ichi Kawarabayashi
雑誌名: Journal of Combinatorial Theory Series B
巻: 117
ページ: 1-21 (2016)
DOI:10.1016/j.jctb.2015.12.001
査読あり
論文タイトル: Highly Connected Subgraphs of Graphs with Given Independence Number (Extended Abstract)
著者名: Shinya Fujita, Henry Liu, Amites Sarkar
雑誌名: Electronic Notes in Discrete Mathematics
巻: 54
ページ: 103-108 (2016)
DOI:10.1016/j.endm.2016.09.019
査読あり / 国際共著/ 国際学会
論文タイトル: Partitioning a Graph into Highly Connected Subgraphs
著者名: Valentin Borozan, Michael Ferrara, Shinya Fujita, Michitaka Furuya, Yannis Manoussakis, Narayanan N, Derrick Stolee
雑誌名: Journal of Graph Theory
巻: 82
ページ: 322-333 (2016)
DOI:10.1002/jgt.21904
査読あり / 国際共著
論文タイトル: From Edge-Coloring to Strong Edge-Coloring
著者名: Valentin Borozan, Gerard Jennhwa Chang, Nathann Cohen, Shinya Fujita, Narayanan Narayanan, Reza Naserasr, Petru Valicov
雑誌名: Electronic Journal of Combinatorics
巻: 22
ページ: P2.9 (2015)
査読あり / オープンアクセス / 国際共著

[学会発表](計 17 件)

講演題目: 連結グラフの optimal proper connection number について
発表者名: 藤田慎也
学会等名: 日本数学会 2019 年度年会
発表場所: 東京工業大学
年月日: 2019-03-17 - 2019-03-20
講演題目: Some recent results on safe set problems in vertex-weighted graphs
発表者名: Shinya Fujita
学会等名: AMS Meeting
発表場所: ハワイ大学 (米国)
年月日: 2019-3-22 - 2019-3-24
国際学会
講演題目: Kernels by properly colored paths in arc-colored digraphs
発表者名: Yandong Bai, 藤田慎也, Shenggui Zhang
学会等名: 日本数学会 2018 年度年会
発表場所: 東京大学
年月日: 2018-03-18 - 2018-03-21
講演題目: 辺着色グラフの proper connection number に関する研究の進展
発表者名: 藤田慎也
学会等名: 2018 年度応用数学合同研究集会
発表場所: 龍谷大学
年月日: 2018-12-13 - 2018-12-15
講演題目: On the weighted safe set problem on paths and cycles

発表者名：藤田慎也, Tommy Jensen, Boram Park, 佐久間雅
学会等名：日本数学会 2018 年度秋季総合分科会
発表場所：岡山大学
年月日：2018-09-24 - 2018-09-27
講演題目：辺着色グラフの分割問題
発表者名：藤田慎也
学会等名：2017 年度日本数学会年会
発表場所：首都大学東京（東京都八王子市）
年月日：2017-03-24 - 2017-03-27
講演題目：Bounding the distance among longest paths in a connected graph
発表者名：Jan Ekstein, 藤田慎也, Adam Kabela, Jakub Teska
学会等名：2017 年度応用数学合同研究集会
発表場所：龍谷大学
年月日：2017-12-14 - 2017-12-16
講演題目：Decomposing edge-colored graphs under color degree constraints
発表者名：Shinya Fujita, Ruonan Li, Guanghui Wang
学会等名：European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Eurocomb 2017)
発表場所：ウィーン工科大学（オーストリア）
年月日：2017-08-28 - 2017-09-01
国際共著/国際学会
講演題目：辺着色グラフの次数条件と閉路の存在について
発表者名：藤田慎也
学会等名：日本数学会 2017 年度秋季総合分科会
年月日：2017-09-11 - 2017-09-14
講演題目：Some results on properly colored cycles in edge-colored graphs
発表者名：藤田慎也
学会等名：2016 年度日本数学会年会
発表場所：筑波大学
年月日：2016-03-16 - 2016-03-19
講演題目：Highly Connected Subgraphs of Graphs with Given Independence Number
発表者名：Shinya Fujita, Henry Liu, Amites Sarkar
学会等名：Discrete Mathematics Days
発表場所：カタルーニャ工科大学（バルセロナ, スペイン）
年月日：2016-07-06 - 2016-07-08
国際共著/国際学会
講演題目：Some results on properly colored cycles in edge-colored graphs（続報）
発表者名：藤田慎也
学会等名：2016 年度日本数学会秋季総合分科会
発表場所：関西大学（大阪府吹田市）
年月日：2016-09-15 - 2016-09-18
講演題目：Partitioning a graph into dense parts
発表者名：藤田慎也
学会等名：2016 International Conference on Graph Theory, Combinatorics and Applications
発表場所：Zhejiang Normal University(金華市, 中国)
年月日：2016-10-29 - 2016-11-01
国際共著/国際学会 / 招待講演
講演題目：Color degree and monochromatic degree conditions for short properly colored cycles
発表者名：藤田慎也
学会等名：The Third Sino-Japan Symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications
発表場所：西北工業大学（西安市, 中国）
年月日：2016-11-03 - 2016-11-06
国際共著/国際学会
講演題目：グラフの安全集合に関する研究の進展
発表者名：藤田慎也
学会等名：2016 年度応用数学合同研究集会
発表場所：龍谷大学
年月日：2016-12-15 - 2016-12-17
講演題目：A New Approach Towards a Conjecture on Intersecting Three Longest Paths
発表者名：Shinya Fujita, Michitaka Furuya, Reza Naserasr, Kenta Ozeki

学会等名：2015 年度日本数学会秋季総合分科会
発表場所：京都産業大学
年月日：2015-09-13 - 2015-09-16
講演題目：Highly connected subgraphs of graphs with given independence number
発表者名：Shinya Fujita, Henry Liu, Amites Sarkar
学会等名：2015 年度応用数学合同研究集会
発表場所：龍谷大学
年月日：2015-12-17 - 2015-12-19

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

該当なし。

取得状況(計 0 件)

該当なし。

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者
該当なし。

(2)研究協力者
該当なし。

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。