様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９８４

研究課題名（和文）Pκλ上のイデアルの構造理論

研究課題名（英文）Structural properties of ideals over Pk\lambda

研究代表者
阿部　吉弘（Abe, Yoshihiro）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：１０１５９４５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：Pκλ上のイデアルの構造的性質の理論を展開した。
最小のイデアル the bounded ideal と同型なイデアルは、例外的な場合を除いて、最小の正規イデアル the nonstationary ideal を含まないことを示した。また、κ上の場合と同様に Ulam ideal を定義し、the bounded ideal は Ulam ではないことを示し、イデアル I が Ulam であることの特徴付けを、I の extension の coherence などを用いて与えた。さらに、剛性についても Ulam iedal との関係などを明かにした。

研究成果の概要（英文）：We developed the theory of structural properties of ideals over Pκλ.
First it was shown that, at the most cases, the ideal isomorphic to the bounded ideal,that is the smallest idal,does not contain the nonstationary ideal, the smallest normal ideal. Second, we define Ulam ideals similar to the case of κ, and show the bounded ideal is not Ulam, and give the characterization of Ulam ideals using the coherence of its extensions.
Last, we study the rigidity of ideals. The relation between the rigid ideals and Ulam ideals have been turned out.

研究分野：公理的集合論

キーワード：ideal　Pκλ　the bounded ideal　the non-stationary ideal　Ulam ideal　Rigidity　coherence

１．研究開始当初の背景

平成 24 年度〜平成 26 年度助成研究「巨大基数を指向しない $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル論」において、$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造的性質に関する理論の部分的展開に成功した。とはいえ、もっとも基本的なイデアルである the bounded ideal $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ の振る舞いですら、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ と同型なイデアルの大きさをはじめ、未解明な部分が多い。正則基数 κ 上のイデアルに関する理論 (Baumgartner-Taylor-Wagon、[BTW] 1982) に匹敵するものを構築するには、解決すべき問題が多数残されていた。

２．研究の目的

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造論的性質（structural property）の研究を前進させる。
さらに、そこで得られた知見を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の組合せ論に残された難問；弱い分割の性質と mild ineffability、コンパクト基数、および $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の濃度の関係、の解決へ役立てる。

３．研究の方法

本研究では、先述の Baumgartner-Taylor-Wagon で明らかにされた κ 上の諸事実と対比させて、$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の全単射に対する $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ の振る舞い、Ulam ideal や イデアルの剛性 (rigidity) にしぼって研究を進めていった。

４．研究成果

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造理論のうち、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ と同型なイデアルの大きさ、Ulam イデアルの特徴付け、各種の rigidity の間の関係など、いくつかの興味深い結果を得た。κ 上に類似した結果もあれば、意外にもかなり異なる様相を示す事実もある。長足とは言えないまでも、研究に相当の進展があったと言えよう。

正則基数 κ と基数 $\lambda \geq \kappa$ に対して, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は濃度が κ より小さい λ の部分集合の族 $\{x : x \subset \lambda,\ |x| < \kappa\}$ である。$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の濃度を $\lambda^{<\kappa}$ で表す。

定義 0.1. $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする。
X は *unbounded* $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $x \subset y$ を満たす $y \in X$ が存在する。
$\{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X$ は unbounded ではない $\}$ を the *bounded ideal* と言い、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ で表す。
X は *closed* $\Leftrightarrow$ X は κ より短い長さの $\subset$ -increasing sequence について閉じている。
X は *club* $\Leftrightarrow$ X は closed かつ unbounded。
X は *stationary* $\Leftrightarrow$ X は任意の club と共通部分をもつ。
$\{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X$ は stationary ではない $\}$ を the *non-stationary ideal* と言い、$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$ で表す。

定義 0.2. I は次の条件 (1) ∼ (5) を満たすときイデアルと言う。

1. $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$,
2. $\emptyset \in I$ かつ $\mathcal{P}_\kappa\lambda \notin I$,
3. $X \subset Y \in I$ ならば、$X \in I$,
4. κ 個より少ない I のメンバーの和集合は、I のメンバーである (κ 完備),
5. $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \subset I$ (fine)。

I *positive set* $I^+ = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda) \setminus I$、$I$ の 双対フィルター $I^* = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus X \in I\}$ とする。$X \in I^+$ に対し I の 制限 (*restriction*) $I|X = \{Y \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : Y \cap X \in I\}$ は I より大きいイデアルで、X はその双対フィルターのメンバーである。
写像 $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \lambda$ が *regressive* $\Leftrightarrow$ 任意の空でない $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $f(x) \in x$。
$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I が 正規 $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ と regressive 写像 $f : X \to \lambda$ に対し、$\{x \in X : f(x) = \gamma\} \in I^+$ である $\gamma < \lambda$ が存在する。
I は 弱正規 $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ と regressive 写像 $f : X \to \lambda$ に対し、$\{x \in X : f(x) < \gamma\} \in I^+$ である $\gamma < \lambda$ が存在する。
$J_w = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda :$ 任意の$\gamma < \lambda$に対し $\{x \in X : f(x) < \gamma\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$である regressive 写像 $f : X \to \lambda$が存在する $\}$。
任意の弱正規イデアルは J_w を含む。
写像 $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が *set-regressive* $\Leftrightarrow$ 任意の空でない $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $f(x) \subset x$ かつ $|f(x)| < |x \cap \kappa|$。
$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I が 強正規 $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ と set-regressive 写像 $f : X \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し、$\{x \in X : f(x) = a\} \in I^+$ である $a \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が存在する。

定義から、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の最小なイデアルで、$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$ は最小の正規イデアルであることが分かる。最小の強正規イデアルを $\mathrm{WNS}_{\kappa,\lambda}$ で表す。
また、κ 上の the bounded ideal $\mathrm{I}_\kappa = \mathrm{I}_{\kappa,\kappa}$, the non-stationary ideal $\mathrm{NS}_\kappa = \mathrm{NS}_{\kappa,\kappa}$ である。

定義 0.3. I は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルで $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする。
(1) f は *I-fine* $\Leftrightarrow$ 全ての $\alpha < \lambda$ に対し、$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \alpha \notin f(x)\} \in I$。
f が I-fine であることと、$f_*(I) = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : f^{-1}(X) \in I\}$ がイデアルであることは同値である。I -fine である関数の集合を $R(I)$ で表す。
$R(I)$ に半順序 $\lessdot$ を、$f \lessdot g \Leftrightarrow \{x : \sup f(x) < \sup g(x)\} \in I^*$ で定める。
(2) I は *P-point* $\Leftrightarrow$ 任意の I-fine 写像 f に対し、$X \in I^*$ で任意の $\alpha < \lambda$ について $\{x \in X : \alpha \notin f(x)\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ を満たすものが存在する。(全ての正規イデアルは P-point である。)
(3) I は *weakly selective* $\Leftrightarrow$ $X \in I^+$ で f が $I|X$-fine ならば、ある $(I|X)^+$ のメンバー上で f は 1 対 1 になっている。
(3) ふたつのイデアル I と J は 同型 ($I \cong J$ で表す) $\Leftrightarrow$ ある全単射 $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ があり、$J = f_*(I)$ 。
(4) I と J は *coherent* $\Leftrightarrow$ $I \cup J \subset K$ を満たすイデアル K がある。
(5) I と J は *pseudo isocoherent* $\Leftrightarrow$ J と $f_*(I)$ が coherent な bijection $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ がある。(f は I -fine でなくてもよい。)

§1. $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ と同型なイデアル

前年度までの助成研究で、次のことが分かっていた。

事実 1.1. $\mathrm{cof}(\lambda) \geq \kappa$、$f$ は $R(I)$ で $\lessdot$ -極小で $\{x : \sup(f(x)) \notin f(x)\} \in I^*$ ならば、J_w と $f_*(I)$ は coherent である。

本研究ではまず、このような f の存在を明らかにした。

定理 1.2. 任意のイデアル I に対し、事実 1.1 の条件を満たす関数 $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が存在する。したがって、$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の全てのイデアルは J_w と coherent なイデアルに射影できる。

次に、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ の制限の間の coherence について調べた。

命題 1.3. (1) $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda} \setminus \mathrm{I}^*_{\kappa,\lambda}$ の濃度が、unbounded set のうちで最小ならば、任意の $Y \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対し $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X$ と同型で $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|Y$ を含むイデアルが存在する。
(2) 任意の unbounded な X と Y に対し、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X$ と同型で $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|Y$ と coherent なイデアルがある。

κ 上では the bounded イデアルの制限は正規ではない。$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ ではそれと異なり、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ の制限が正規イデアルになる場合が知られている。しかし、次の事実もよく知られている。

事実 1.4 $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ ならば、任意の stationary set X に対し、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X \neq \mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}|X$ である。
これは次のように一般化できた。

命題 1.5. $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ ならば、任意の unbounded set X と $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し、$f_*(\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X)$ は J_w を含まない。

次は、イデアルの生成元の濃度に関する周知の事実である。

事実 1.6. (1) λ -生成イデアルは正規ではない。
(2) $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は強正規ではない。

これを拡張することにも成功した。

命題 1.7. (1) λ -生成イデアルは J_w を含まない。
(2) κ が Mahlo 基数ならば、$\lambda^{<\kappa}$ -生成イデアルは $\mathrm{WNS}_{\kappa,\lambda}$ を含まない。

系 1.8. (1) Unbounded set の最小濃度が λ ならば、任意の $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対し、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X$ と同型なイデアルは $\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$ を含まない。
(2) κ が Mahlo 基数ならば、任意の $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対し、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X$ と同型なイデアルは $\mathrm{WNS}_{\kappa,\lambda}$ を含まない。

§2. Ulam イデアル

定義 2.1. I は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルで $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする。
I は *Ulam* $\Leftrightarrow$ $f:\mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が 2 to 1 ならば、ある $X \in I^*$ 上で f は 1 対 1 である。

Ulam ではないイデアルは必ず存在し、ある条件の下で Ulam イデアルが存在する。

命題 2.2. (1) $A \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対し、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|A$ は Ulam ではない。
(2) $\{t_\xi : \xi < \lambda^{<\kappa}\}$ を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の enumeration、$\{A_\xi : \xi < \lambda^{<\kappa}\}$ を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の互いに素な unbounded set による分割とする.

$$X \in I \Leftrightarrow \{t_\xi : X \cap A_\xi \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$$

で定義される $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I は Ulam ではない。(この I は、どんな unbounded set X に対しても $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X$ と異なることが示せる。)

(3) $J_w \subset I$ で $\sup|X$ が 1 対 1 であるような $X \in I^*$ が存在するならば、I は Ulam である。

Ulam イデアルに関しては、[BTW] と同様な特徴付けを証明できた：

定理 2.3. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I について、次の (1) ～ (5) は同値である：

(1) I は Ulam である。

(2) $I \subset J, K$ で、$J \cong K$ ならば、$J = K$ である。

(3) $I \subset J, K$ で、$J \cong K$ ならば、J と K は coherent である。

(4) $I \subset J, K$ で、J と K が *pseudo isocoherent* ならば、J と K は coherent である。

(5) $A, B \in I^+$ で $I|A$ と $I|B$ が pseudo isocoherent ならば、$I|A$ と $I|B$ は coherent である。

系 2.4. I は Ulam イデアルで $I \subsetneq J$ とする。このとき、どんな $A \in J \setminus I$ に対しても $I|A$ と J は pseudo isocoherent ではない。

§3. イデアルの剛性 (rigidity)

各種の剛性について、それらの間の、および Ulam イデアルとの関係を調べた。κ 上のイデアルの場合 [BTW] と同じような結果もあるが、かなり異なる興味深い事実も発見された。

定義 3.1. I を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルとする。
(1) I が 剛性 をもつ (*rigid*) $\Leftrightarrow$ $f_*(I) = I$ ならば、ある $X \in I^*$ 上で $f = id.$、つまり、任意の $x \in X$ に対し $f(x) = x$ である。
(2) I が *bijectively rigid* $\Leftrightarrow$ $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が全単射で $f_*(I) = I$ ならば、ある $X \in I^*$ 上で $f = id.$ である。
(3) I が *locally rigid* $\Leftrightarrow$ $f_*(I) = I$ ならば、ある $X \in I^+$ 上で $f = id.$ である。
(4) I が *weakly rigid* $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ に対し、$I|X$ は locally rigid である。

定義から次のことは明らかである。

事実 3.1. Rigid なイデアルは、bijectively rigid かつ locally rigid である。

Ulam イデアルと同じく、rigid ではないイデアルが存在するが、bijectively rigid イデアルも必ず存在する。また、ある条件下で、剛性をもつイデアルが存在する。

命題 3.2. (1) $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は bijectively rigid および locally rigid のいずれでもない。
(2) $\lambda > \kappa$ に対し、J_w は bijectively rigid および locally rigid のいずれでもない。($\lambda = \kappa$ のときは、$J_w = \mathrm{NS}_\kappa$ は rigid である。)
(3) 正規イデアルは bijectively rigid である。
(4) I は弱正規イデアルか J_w を含む P-point のいずれかで、$\sup|X$ が 1 対 1 であるような $X \in I^*$ が存在するならば、I は rigid である。

Bijectively rigid なイデアルに関しては、[BTW] と同様な特徴付けを証明できた：

定理 3.3. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I について、次の (1) ～ (3) は同値である：

(1) I は bijectively rigid である。

(2) $A, B \in I^+$ で $I|A \cong I|B$ ならば、$I|A = I|B$ である。

(3) $A, B \in I^+$ で $I|A \cong I|B$ ならば、$I|A$ と $I|B$ は coherent である。

系 3.3. 正規イデアルの異なる制限は同型ではない。

定理 3.2 を足場に、各種の rigidity 間および、rigidity と Ulam イデアルの関係が次第にわかってきた。

命題 3.4. (1) Bijectively rigid なイデアルの制限は bijectively rigid である。
(2) Rigid なイデアルは weakly rigid である。
(3) Weakly rigid なイデアルは、bijectively rigid かつ locally rigid である。

定理 3.5. (1) Ulam イデアルは bijectively rigid である。
(2) I が Ulam で $\sup|X$ が 1 対 1 であるような $X \in I^*$ が存在するならば、I は weakly rigid である。
(3) Weakly selective な Ulam イデアルは、rigid である。
(4) $\sup|X$ が 1 対 1 であるような stationary set X が存在するならば、locally rigid だが bijectively rigid ではないイデアルが存在する。
(5) $\sup|X$ が 1 対 1 であり、$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}|X$ が nowhere λ saturated であるような stationary set X が存在するならば、rigid ではない Ulam イデアルが存在する。

最後に、イデアル I が Ulam かどうかと、I の exgtension の rigidty との関係を述べる。

定理 3.6. イデアル I に対し、以下の implication (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) が成り立つ。さらに、$\sup|X$ が 1 対 1 であるような $X \in I^*$ が存在するならば、(1) $\sim$ (4) は同値である。

(1) I を含むイデアルは全て locally rigid である。
(2) I を含むイデアルは全て weakly rigid である。
(3) I を含むイデアルは全て bijectively rigid である。
(4) I は Ulam である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計 12 件）

[1] Yoshihiro Abe, Structural properties of ideals over $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, Tsukuba Journal of Mathematics 39 (2015), 83-95.

[2] Joan Bagaria, Joel David Hamkins, Konstantinos Tsapronis, and Toshimichi Usuba, Supeerstrong and strong cardinals are never indestructible, Archive for Mathematical Logic 55 (2016), 19-35.

[3] Toshimichi Usuba, Subtle properties and partition relations, Mathematical Logic Quarterly 62 (2016), 59-71.

[4] Toshimichi Usuba, Reflection Principles for ω_2 and semi-stationary reflection principle, Journal of Mathematical Society of Japan 68 (2016), 1081-1098.

[5] Toshimichi Usuba, Large regular Lindelöf spaces with points G_δ, Fundamenta Mathematicae 237 (2017), 249-260.

[6] Toshimichi Usuba, Notes on elementary submodel spaces, 数理解析研究所講究録 1987 (2016), 32-36.

[7] Toshimichi Usuba, Supercompact cardinals in ZF, 数理解析研究所講究録 1988 (2016), 77-80.

[8] Hiroaki Minami and Hiroshi Sakai, Katetov and Katetov-Blass orders on F_σ -ideals, Archive for Mathematical Logic 55 (2016), 883-898.

[9] Toshimichi Usuba, The downward directed grounds hypothesis and very large cardinals, Journal of Mathematical Logic 17 (2017), 175-209.

[10] Toshimichi Usuba, Variants of the ground axiom, 数理解析研究所講究録 2042 (2017), 106-111.

[11] Toshimichi Usuba, New combinatorial principle on singular cardinals and normal ideals, Mathematical Logic Quarterly, in press.

[12] Toshimichi Usuba, Notes on products of Lindelöf spaces with points G_δ, 数理解析研究所講究録 (2018), in press.

〔学会発表〕（計 29 件）

[1] Toshimichi Usuba, Large regular Lindelöf spaces with points G_δ, Sets and Computations, National University of Singapore, Singapore (2015 年 4 月 8 日)

[2] Toshimichi Usuba, Long Cut and Choose game and the infinite distributive law, BLAST2015@UNT, University of North Texas, USA (2015 年 6 月 8 日)

[3] Toshimichi Usuba, Long topological games and Lindelöf spaces with points G_δ, International Conference on Set-Theoretic Topology and its Applications, 神奈川大学 (2011 年 8 月 25 日)

[4] Toshimichi Usuba, Set-theoretic geology and large cardinals, Computability Theory and Foundations of Mathematics 2015, 東京工大 (2015 年 9 月 11 日)

[5] 阿部吉弘, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の isocoherence をどう定義するか, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学 (2015 年 9 月 15 日)

[6] Toshimichi Usuba, Set-theoretic geology and large large cardinals, Recent Developments in Axiomatic Set Theory, 京都大学 (2015 年 9 月 17 日)

[7] 薄葉季路, Remarks on elementary submodel topology, 集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展開, 京都大学 (2015 年 11 月 18 日)

[8] Toshimichi Usuba, Selective ideals over $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Minnan Normal University, China (2015 年 11 月 26 日)

[9] Hiroaki Minami, The dominating number of F_σ ideals on Katetov-Blass order, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Minnan Normal University, China (2015 年 11 月 27 日)

[10] Toshimichi Usuba, The Downward Directed Grounds hypothesis, IMS-JSPS joint Workshop in Mathematical Logic and Fundations of Mathematics, National University of Singapore, Singapore (2016 年 1 月 26 日)

[11] 薄葉季路, 有向集合の分類, 山陰基礎論・解析学セ

ミナー 2016, 皆生の里「ゆるり」, 米子 (2016 年 1 月 30 日)

[12] 薄葉季路, The universe and multiverse, 科学基礎論学会 2016 年度総会・講演会, 埼玉大学 (2016 年 6 月 19 日)

[13] Toshimichi Usuba, Linelöf spaces and large cardinals, Topsym 2016, Czech technical University, Czech republic (2016 年 7 月 26 日)

[14] 阿部吉弘, The extent of ideals over $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ below the bounded ideal in the Rudin-keisler ordering, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学 (2016 年 9 月 17 日)

[15] 薄葉季路, Set-theoretic geology without AC, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学 (2016 年 9 月 17 日)

[16] Toshimichi Usuba, Definability of grounds in ZF, Infinite Combinatorics and Forcing Theory, 京都大学 (2016 年 12 月 1 日)

[17] 薄葉季路, Paracompactness of locally Lindelöf spaces, 2016 年度ジェネラルトポロジーシンポジウム, 筑波大学 (2016 年 12 月 8 日)

[18] 薄葉季路, 大域的と局所的：パラコンパクトを題材に, 山陰基礎論・解析学セミナー 2017, 米子国際ファミリープラザ (2017 年 1 月 9 日)

[19] Toshimichi Usuba, The Downward Ground Hypothesis, Academy of Mathematics and Systems Science Colloquium, Chinese Academy of Science, China (2017 年 2 月 26 日)

[20] 薄葉季路, 集合論の宇宙 - universe と multiverse, 日本数学会 2017 年度年会 (特別講演) , 首都大学東京 (2017 年 3 月 24 日)

[21] Toshimichi Usuba, Set-theoretic geologies, 6th European Set Theory Conference, Alfréd Rényi Institute of Mathematics of the Hungarian Academy of Sciences, Hungary (2017 年 7 月 3 日)

[22] 薄葉季路, パラコンパクト空間と強制法公理, 第 64 回トポロジーシンポジウム, 東海大学 (2017 年 8 月 22 日)

[23] Toshimichi Usuba, Set-theoretic geologies, Workshop on Computability Theory and Fundations of Mathematics, National University of Singapore, Singapore (2017 年 9 月 9 日)

[24] Toshimichi Usuba, G_δ -modification and large cardinals, Iterated Forcing Theory and Cardinal Invariants, 京都大学 (2017 年 11 月 8 日)

[25] 薄葉季路, 集合論の宇宙と強制法, 東北大学理学部数学科談話会, 東北大学 (2017 年 12 月 11 日)

[26] 阿部吉弘, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造理論, 山陰基礎論・解析学セミナー 2018, 皆生の里「ゆるり」, 米子 (2018 年 1 月 7 日)

[27] 薄葉季路, 多元宇宙論入門, 山陰基礎論・解析学セミナー 2018, 皆生の里「ゆるり」, 米子 (2018 年 1 月 7 日)

[28] 薄葉季路, Products of Lindelöf spaces, 日本数学会 2018 年度年会, 東京大学 (2018 年 3 月 18 日)

[29] 薄葉季路, Compactness cardinals and covering properties of topological spacese, 手形 L4 研究集会, 秋田大学 (2018 年 3 月 28 日)

〔図書〕（計 1 件）

佐野勝彦, 倉橋太志, 薄葉季路, 黒川英徳, 菊池誠, 数学における証明と真理 - 様相論理と数学基礎論 -, 共立出版 (2016) .

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

該当無し

６．研究組織

(1) 研究代表者

阿部　吉弘　（ Abe, Yoshihiro ）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：１０１５９４５２

(2) 研究分担者

薄葉　季路　（ Usuba, Toshimichi ）

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号： １０５１３６３２

南　裕明　（ Minami, Hiroaki ）

愛知学院大学・教養部・講師

研究者番号： ７０６４６８８５