様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９９１

研究課題名（和文）精度保証法によるLyapunov関数構成法の研究

研究課題名（英文）Constructing Lyapunov functions by verified numerics

研究代表者
山本　野人（Yamamoto, Nobito）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：３０２１０５４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、力学系解析のツールとして重要な Lyapunov 関数の具体的な構成を精度保証付き数値計算法を用いて行う手法を対象としている。精度保証法を用いることにより、構成された Lyapunov 関数は数学的に厳密なものとなり、力学系の様々な性質に関する数学的な論証の道具として利用することが出来る。本研究は３年の期間の間に、双曲型平衡点もしくは不動点を持つ連続または離散力学系に対して二次形式の関数系を持つLyapunov関数の構成法およびその定義域の検証法を確立した。さらに、この手法の発展および応用についての研究を進め、いくつかの成果を得た。

研究成果の概要（英文）：Constructing Lyapunov functions by verified numerics has been studied. It is well known that Lyapunov functions are very important tools in order to analyze dynamical systems. Once a Lyapunov function is constructed by verified numerics for a dynamical system, it can be used in mathematical proofs concerning the dynamical system. We have established the methods to construct Lyapunov functions with quadratic forms for continuous and discrete dynamical systems which have hyperbolic equilibria and fixed points, respectively. Our methods also verify areas included by the domain of the Lyapunov functions. Moreover we developed our method and investigated their applications and have obtained several interesting results.

研究分野： 数値解析、精度保証付き数値計算法

キーワード： 数値解析　精度保証法　力学系　Lyapunov 関数

１．研究開始当初の背景

力学系における Lyapunov 関数の構成については長い歴史があり、さまざまなアプローチが存在する。しかしながら、近似的な Lyapunov 関数ではなく数学的論証に用いることができるような厳密な Lyapunov 関数の構成は、簡単な場合を除けば一般には困難であった。一方で、精度保証法は数学的に厳密な検証をコンピュータで行う方法として発展を続け、研究開始当初では重層的な手法の積み上げを有していた。精度保証を利用して Lyapunov 関数を厳密に構成する試みは、研究開始時期には我々の研究を含めて同時発生的に出現し、例えば Peter Giesl and Sigurdur Hafstein,の研究が成果を出し始めていた。ただし彼らの研究は工学的な応用を念頭においた狭義の Lyapunov 関数の構成を目指していて、力学系解析では重要となるサドル型平衡点などを扱うものではなかった。

２．研究の目的

上述の研究背景を踏まえて、精度保証法による Lyapunov 関数の構成法を構築する。特に、力学系解析で重要となるサドル型平衡点を含む双曲型平衡点・不動点全般に対し、連続力学系および離散力学系を統一的に扱う手法の開発を目指し、さらに構築された方法を応用して力学系の諸問題の解法を与える。

３．研究の方法

双曲型平衡点・不動点の近傍では、与えられた力学系がこれを線形化した力学系と同値（正確には局所位相同値）となることが知られている（ハルトマン・グロブマンの定理）。したがって、線形化された力学系に対しての Lyapunov 関数を構築すれば、もとの力学系の平衡点・不動点のある近傍で同じ関数が Lyapunov 関数となる。このことが成立する近傍を精度保証法で特定することが本研究の主たる方法である。以下にその詳細を記す.

Lyapunov 関数は位相空間上の点の位置で決まるスカラー値関数であり、与えられた力学系に従って この点が推移する際に、その値が必ず減少する性質を持つ。言い換えれば、力学系によって動く点は Lyapunov 関数の等高線を下って移動する。平衡点・不動点や周期軌道などの近傍で Lyapunov 関数が構 成できれば、そこでの力学系の解析のための非常に強力な道具となる。

精度保証の方法によってある関数が Lyapunov 関数であるかどうかを検証するためには、不動点(連 続力学系では平衡点。以下同様)から離れた位置であれば、点の推移にしたがってその関数値が減少することを直接確認する方法を採用できる。しかしながら、不動点近傍では精度保証で用いる区間ベクト ルが不動点を含むことになるため、この方法は使えない。

不動点近傍での Lyapunov 関数の同定は、双曲型不動点の場合には不動点における微分情報を基に行うことができる。これは、いわゆる Lyapunov 方程式もしくは Lyapunov 不等式と関係し、力学系において錐条件(の十分条件)として知られているもの [2] と同一であるが、Lyapunov 関数となる二次形式 の導出法およびその定義域の確定のために精度保証法を用いる点に本手法の新規性がある。

連続力学系については、平衡点の安定性は微分方程式右辺を与える関数の零点におけるヤコビ行列の 固有値に関係する。このヤコビ行列の固有値及び固有ベクトルの情報をもとにして、平衡点を原点に取った相空間上の二次形式を導出する。これは、解軌道に沿った時間微分が不動点で 0, それ以外の点で 0 未 満となるように設計される。ただし、このような性質を持つ二次形式にはある程度の任意性があり、これを利用して安定もしくは不安定多様体の存在範囲をより限定する方法が導出できる(m-錐体法)。

次に、この二次形式が Lyapunov 関数となっている領域を特定する。これにはふたつのステージがある。 ステージ 1. 平衡点を含む比較的小さな領域では、二次形式の時間微分から導かれる行列の負定値性を精度保証法によって検証することで、Lyapunov 関数の条件(時間微分が 0 以下)を確認する。 ステージ 2. 平衡点から比較的離れた領域では、これを小領域に分割し、各々の小領域に対する二次形式の時間微分を区間演算を用いた精度保証法によって直接計算し、負であることを確認する。

与えられた領域についてこの手順による確認が取れれば、導出した二次形式はその領域における Lyapunov 関数となっている。ただし精度保証法の特性から、ステージ 2 の方法は平衡点を含む小領域には適用できないことに注意する。

以下では、常微分方程式で記述される連続力学系について説明する。ここでは、つぎのような正規形の連立 1 階常微分方程式のうち、自励系(方程式右辺に時間変数を陽に含まない)を扱う。

dx /dt = f(x),,　 x, f は Rn　の元.

平衡点 x_e は方程式右辺の零点であり、必要であれば精度保証法によって数値的に確定しているものとする。また、この平衡点が双曲型であることも仮定する。すなわち、f (x) の x_e におけるヤコビ行列の固有値の実部は 0 でないものとする。

Lyapunov 関数の候補となる２次形式の導出法を説明する。

1. x = x_e における f (x) のヤコビ行列を Df_e と置く。簡単のため、これが正則行列によって対角化可能であるとし(そうでない場合についての方法も導出できるが煩雑

になるのでここでは述べない)、　Λ を固有値 λ1, λ2, · · · , λn を並べた対角行列、X を対応する固有ベクトルを並べた行列とする。これらの算定には通常の浮動小数点演算を用いれば良く、精度保証の必要はない。

2. 行列 I_e を対角行列とする。ただし、Re(λk) < 0 のときは−1,　Re(λk) > 0.のときは 1 を取るものとする。双曲性の仮定から、Re(λk) = 0 とはならないことに注意する。

3. 実対称行列 Y を以下のように算定する。
Y^ = X_H I_e X_R, Y = Re(Y^).
ただし、X_R は行列 X の逆行列、X_H は行列 X の共役転置の逆行列である。この算定も浮動小数点演算を用いてよい。

4. Lyapunov 関数となる二次形式として、次のものを定める。

L(x) = (x−x□)_T　Y　(x−x□).

ただし、_T は転置を表す。これを精度保証計算で扱う場合には、Y の対称性を確保するために、
◦ Y の代わりに(Y +Y_T)/2 を用いる
もしくは、
◦ Yji = Yij と置く
などの操作を行っておく。

次に、連続微分可能な写像で記述される離散力学系について説明する。写像としては

x(n+1) = ψ(x(n)), x(0),ψ は Rm の元

の形のものを扱う。必要であれば精度保証法によって不動点 x_f を数値的に確定しておく。さらに、不動点は双曲型であることを仮定する。すなわち、写像 ψ(x) のヤコビ行列 Dψ(x) の x_f における固有値 の絶対値は 1 と異なるものとする。
Lyapunov 関数となる二次形式は以下のように構成する。

1. A = Dψ(x_e) と定め、これを対角化する。すなわち、Λ を固有値 λ1, λ2, · · · , λm を並べた対角行列、X を対応する固有ベクトルを並べた行列とする。これらの算定には通常の浮動小数点演算を用いれば良く、精度保証の必要はない。

2. 行列 I_f を対角行列とする。ただし、|λk| < 1 のときは 1,　|λk| > 1 のときは -1 を取るものとする。双曲性の仮定から、|λk| = 1 とはならないことに注意する。

3. 実対称行列 Y を以下のように算定する。
Y^ = X_H I_f X_R, Y = Re(Y^).
ただし、X_R は行列 X の逆行列、X_H は行列 X の共役転置の逆行列である。この算定も浮動小数点演算を用いてよい。

4. Lyapunov 関数となる二次形式として、次のものを定める。

L(x) = (x−x□)_T　Y　(x−x□).

ただし、_T は転置を表す。これを精度保証計算で扱う場合には、Y の対称性を確保するために、
◦ Y の代わりに(Y +Y_T)/2 を用いる
もしくは、
◦ Yji = Yij と置く
などの操作を行っておく。

以上からわかるように、我々の Lyapunov 関数構成法は，連続力学系に対しても離散力学系に対してもほぼ同じプロセスを踏んでいる。このことから、これらの力学系を統一的に扱うことが可能となり、Hybrid 力学系のような混合問題にも適用できる方法となっている。

４．研究成果

双曲型平衡点および不動点について、上述の方法に基づいた Lyapunov 関数の構成法を確立した。また、先行していた Hafstein らの手法との比較も行った。さらに、連続力学系と離散力学系の合成である Hybrid 力学系に対しても本手法を拡張した。また、ホモクリニック軌道の精度保証法による存在検証などの力学系の問題を、本手法を応用して解決する方法を開発した。
主要な成果である学術雑誌掲載論文(1)には、数学的な論証のほか、Lyapunov Tracing などここで触れられなかった重要な概念の導出がある。特に数値例については、 (1) にあたっていただきたい。また、この手法の具体的な応用としては、ホモクリニック軌道の存在検証のほかに、特異摂動問題への適用や爆発解の精度保証などがある。
Lyapunov 関数は非常に強力な解析ツールであるが、線形システムを除けばその構成は困難であると言われて来た。非線形システムに対しても、精度保証法の利用によって具体的な構成方法を確立できたことには大きな意義があると自負している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）
(1) On the construction of Lyapunov functions with computer assistance,
K. Matsue, T. Hiwaki, N. Yamamoto
Journal of Computational and Applied Mathematics, 319/ C, 385-412, 2017/03/01
査読あり
(2) Some remarks on a priori estimates of highly regular solutions for the Poisson equation in polygonal domains,
T. Kinoshita, Y. Watanabe, N. Yamamoto, M.T. Nakao,
Japan Journal of Industrial and Applied

Mathematics, 33/ 3, 629-636, 2016/10/24
査読あり
(3) Some remarks on numerical verification of closed orbits in dynamical systems,
T. Hiwaki, N. Yamamoto,
Nonlinear Theory and its Applications, IEICE, E-6N/ 3, 397-403, 2015/07/01
査読あり

〔学会発表〕（計 6 件）
(1) Nobito Yamamoto,,Kouki Nitta,
On numerical verification of existence of homoclinic orbits of dynamical systems of higher dimensional cases,
International Workshop on Numerical Methods for PDEs, 2018, HongKong
(2) 新田光輝、松江要、小林健太、山本野人「精度保証付き数値計算による写像度の計算手法の提案」、第４６回数値解析シンポジウム, 2017
(3) 新田光輝、中山大輔、三宅智大，山本野人「Hybrid 力学系の不動点および Lyapunov 関数についての精度保証」、応用数理学会年会,2016
(4) Nobito Yamamoto,
Numerical verification of existence of homoclinic orbits in dynamical systems,
SCAN2016, 2016
(5) 山野駿、山本野人、松江要「連続力学系におけるホモクリニック軌道の精度保証について」、応用数学合同研究集会,2015
(6) 三宅智大、樋脇知広、山本野人「力学系における周期解近傍の Lyapunov 関数の精度保証による構成」、第４４回数値解析シンポジウム,2015

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
山本野人（ YAMAMOTO, Nobito ）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号：30210545

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし