

令和元年6月8日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04992

研究課題名(和文) 数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式の研究

研究課題名(英文) Study on nonlinear partial differential equations arising in the mathematical finance

研究代表者

石村 直之 (ISHIMURA, NAOYUKI)

中央大学・商学部・教授

研究者番号：80212934

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式の研究を通して、非線形解析学における新たな知見をいくつか得た。具体的には、伝染病発生における保険会社のリスク評価モデルを提案しそのリスクの評価を行った。また、2つの独立な離散型確率過程を伴う最適化問題において、離散型伊藤公式の定式化と、離散過程が連続過程に収束する場合の収束性を証明した。最後に、非線形相関を表すコピュラの時間発展方程式を解析し、為替相関への応用を通して適用可能性を実証した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

伝染病発生による保険会社のリスク評価モデルは、ヒトやモノの移動が盛んな現代社会の一つのリスクを明らかにしてその評価を行うという意味で、数理解析学の社会への応用可能性を示すものである。2つの独立な離散型確率過程に関する成果は、伊藤の公式と関連させて収束性を示したという点で新しい知見である。最後にコピュラの時間発展に関しては、為替相関のある種の現象をうまく説明できることを実証したことで、導入されたコピュラの時間発展の概念が有効であることを示した。解析の可能性を拡げたといえる。

研究成果の概要(英文)：Through the study of nonlinear partial differential equations arising in the mathematical finance, we establish several results on nonlinear analysis. To be precise, we propose a risk estimation model for an insurer due to the epidemic outbreaks and estimate its risk. Next, we analyze the optimal portfolio problem in discrete processes with two independent random variables; we derive the discrete analogue of the famous Ito formula and prove the convergence from discrete to continuous setting. Finally, we apply the evolution of copulas to the analysis of foreign exchange rate and show the validity of the concept of evolution of copulas.

研究分野：Nonlinear Analysis, Mathematical Finance

キーワード：伝染病発生 リスク評価 離散過程 伊藤の公式 コピュラ 時間発展 為替相関

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスの研究において、非線形偏微分方程式を用いて解析される研究対象は、数理ファイナンスの分野が開拓された当初から存在していた。それは、方程式そのものは線形である Black-Scholes 偏微分方程式において、境界条件を非線形としたり、あるいは非線形項を含めたりするものであった。今回の研究課題では、非線形な関係を記述するコピュラ関数(copula function)の偏微分方程式、特異な非線形偏微分方程式を導く最適投資問題に取り組んだ。研究開始当初においては、コピュラと偏微分方程式との関連は全く希薄な状態であり、わずかに挙げるとすれば、単純な解しか持ちようのない調和コピュラ(harmonic copula)のみであったと述べて大過ない。今回の研究では、コピュラを偏微分方程式に従って時間発展させるものであり、研究開始当初においては類似した研究はほぼ皆無であった。また、特異な偏微分方程式の研究では、それまでの成果を拡張しようとするものであった。今回の研究の動機は、どちらの課題においても、非線形偏微分方程式の手法を通して、数理ファイナンスの題材を解析してその応用を探るものであった。

### 2. 研究の目的

2008年以降の金融危機は、金融工学・数理ファイナンスの存在意義を強く問う事態になっている。金融工学・数理ファイナンスの重要性に疑義はなかろうとも、より良い世界の実現に貢献するような精緻な研究が求められている。一般に、金融工学・数理ファイナンスのみならず社会科学において、数理モデルを用いた研究は対象の数理的な理解のための重要な手法である。例えば理論経済学における数理手法は、一般均衡理論における位相的手法であり、ゲーム理論を始めとする数理技法であれ、経済対象のミクロ的な理解のために極めて有効であり続けている。その中でも確率解析と非線形偏微分方程式論の社会科学の数理への応用は、1980年代以降急速に発展してきている。特に金融の数理、いわゆる金融工学・数理ファイナンスの分野で、この確率解析と、数値解析をとまなう非線形偏微分方程式論、すなわち応用解析の知見が大いに利用されるようになってきている。例えば、高速数値計算によって定量的により正確で詳細な予測が可能となってきている。しかしながら、社会科学の数理モデルを元にした研究成果が、数理科学や自然科学へ応用されるようになってきたわけではない。数理科学者は、多くの場合に社会科学における数理的な進歩には関心は高くないからである。

この研究では、数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式の解析を通して、社会科学の数理が数理科学に寄与することが可能であることを示し、その達成をもって研究の目的とするものである。具体的には、主に次の2つの課題に取り組み、数理ファイナンスにおける非線形偏微分方程式の手法の有効性を確認する。

(1) コピュラの時間発展の研究：金融の世界では、しばしば重大な危機が発生することは周知の事実である。そのような危機を解析する際において、必ずしも独立でない非線形な事象間の関係を考察することは重要である。なぜならば、危機は、単独の事象というよりも多くの異なる事象が接続して悪化することにより発生するからである。またその他の例でも、東日本での地震と西日本での地震は、独立な事象であると断言することは難しく、微妙に非線形な関係であることが予想される。しかも、その関係は時間とともに変化しうる。このような非線形な事象の関係を数理解析には、非線形な相関を、要因に分解して解析することを可能とするコピュラが有効であることが知られている。しかし、従来の手法では時間発展を扱う概念が希薄であった。確率事象の間関係は、一般には時間とともに変化しうるため、コピュラの時間発展という概念は自然である。研究代表者は、応用解析的な非線形偏微分方程式の観点からコピュラの時間発展を導入した。その重要性に疑いはないものの、現時点ではコピュラの時間発展における収束先が単純なものに限られている。研究期間内に、この点を踏まえて、コピュラの時間発展の実際問題への応用可能性を達成することをもって研究目的とする。応用に簡便かつ有効なコピュラの時間発展が導入されることは、金融工学・数理ファイナンスのみならず、同時分布と周辺分布の非線形な関係にかかわる他の多くの分野、例えば、損害保険の数理にとって極めて有益であり、不確実な現象間における非線形な関係の解明に新たな方向を与えることは確かである。

(2) 最適投資問題の非線形偏微分方程式の研究：変動する経済状況のもとで、企業が満期における利益や効用を最適化しようとする問題は、社会科学の数理において重要な課題であり続けてきた。一般には確率制御理論の枠組みで問題を定式化することが多いが、このとき、最適化を特徴付ける必要条件として、Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程式が現れる。研究代表者は、この HJB 方程式から特異な非線形偏微分方程式を新たに導出し、そのうちの設定が簡単な場合に特殊解の性質について論じた。導出された方程式の未知関数は、Arrow-Pratt の絶対的およびリスク回避度に関連しているという点で経済学としても意味がある。またこの方程式は、HJB 方程式の困難さを減少させるわけではないが、偏微分方程式論の観点からは、部分積分が可能であるため、やや取り扱いやすくなっている。非線形偏微分方程式の研究の立場では、方程式単独でも研究されるべきものと考えられる。しかしながら、現在のところ一般の解の存在さえも証明されておらず、単に進行波解などの特殊解のいくつかが解析されたのみである。このような状況でも、経済の現象の説明は可能となっているので、さらなる研究を進めることは実際に必要である。

### 3. 研究の方法

数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式の研究を通して数理科学の発展に寄与する、という研究目的を達成するための研究方法では、夢のような飛躍はおおむね期待できないため、徹頭徹尾に地道な取り組みを重ねる計画と方法となる。そのため、基礎文献や参考図書を不断に調査し、研究の途中結果として得られた成果であっても常に他の研究者の前で公表し批判を受け、その批判をもとにして改善を図る、このような地味な作業の繰り返しとなる。研究の各年度の計画に大きな差はない。研究体制も主として個人研究であり、研究代表者自身が積極的に研究集会やセミナーに出向いて発信することが中心となる。博士課程の院生と議論を重ねる機会もあるが、基本となるのはあくまで研究代表者の個人研究であった。

### 4. 研究成果

(1)最初の成果は、伝染病発生に関して保険会社がリスク評価を行うための数理モデルを開発し、それに基づいたリスクの解析的な評価を与えたことである。伝染病発生を確率過程によりモデル化し、総患者数の見積もりは応用解析の知見を利用した。速報の論文を公表した後で改良を加え、その結果は国際会議 ASTIN での講演に採択された。確率解析と応用解析という異なる領域の成果を利用しており、簡単なモデルではあるものの国際会議では多くの注目を集め、その後もいくつかの拡張が考案されている。

(2)続く成果は、2つの異なる離散確率過程のもとでの最適投資問題において最適化の条件を与えたことである。導出の段階で、連続過程に対する著名な伊藤の補題を、2つの離散仮定の場合へと拡張した。さらにその後、離散課程が連続課程に収束する場合に、離散伊藤公式の連続公式への収束を示した。収束証明によって数値計算への応用が考えられるが、数学として解析的にも興味ある成果となった。

(3)最後にコンピュータの時間発展に関しては、為替相関への応用を考察し、ある種の突飛な変化に関しては実際に適用可能であることを実証した。この課題については、これまでの研究成果のまとめの論文を公表した。偏微分方程式に従ってコンピュータそのものが変化していくというアイデアは、コンピュータ研究では独自であるため多くの研究者に刺激を与えたようだ。そのうちの一人とは国際共同研究につながり、やはり外国為替の変動に関する解析を行った国際共著論文として公表された。

コンピュータ研究においては、新しい研究の芽が得られた。それはファイナンスの実務において主要な指標として用いられている VaR(Value at Risk)とコンピュータを結びつけるというアイデアである。コンピュータは非線形な相関を記述するため、VaR との関連はむしろ結び付けられるべきものである。この課題では、既存の実用公式が実際に唯一の解を導くことを解析的に証明し、さらに現実の株価変動のデータを用いた実証研究につなげている。これは、当初予想していなかった新たな知見といえる。

### 5. 主な発表論文等

#### [雑誌論文](計6件)

Ivan Kupka, Jozef Kisel'ak, [Naoyuki Ishimura](#), Yasukazu Yoshizawa, Ledys Salazar, and Milan Stehlik: Time evolution of copulas and foreign exchange markets, *Information Sciences*, 467 巻, 2018 年, 163-178 ページ, 査読有。  
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.07.052>

Yasukazu Yoshizawa and [Naoyuki Ishimura](#): Evolution of multivariate copulas in continuous and discrete processes, *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 25 巻, 2018 年, 44 - 59 ページ, 査読有。  
<https://doi.org/10.1002/isaf.1420>

[Naoyuki Ishimura](#) and Yasukazu Yoshizawa: Evolution of copulas in discrete processes with application to a numerical modeling of dependence relation between exchange rates, *Springer Lecture Notes in Computer Science, Numerical Analysis and its Applications (NAA 2016)*, 10187 巻, 2017 年, 350 - 357 ページ, 査読有。  
[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-57099-0\\_39](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-57099-0_39)

[Naoyuki Ishimura](#) and Naohiro Yoshida: On the convergence of discrete processes with multiple independent variables, *The ANZIAM Journal*, 58 巻, 2017 年, 379 - 385 ページ, 査読有。  
<https://journal.austms.org.au/ojs/index.php/ANZIAMJ/article/view/11089>

[Naoyuki Ishimura](#), Daniel Komadel, and Yasukazu Yoshizawa: Risk estimation model on epidemic outbreaks for an insurer, *ASTIN Colloquium 2016*, 2016 年, 11 ページ, 査読有。  
<http://www.actuaries.org/lisbon2016/index.cfm>

Naohiro Yoshida and Naoyuki Ishimura: Remarks on the optimal portfolio problem in discrete variables with multiple stochastic processes, *International Journal of Modeling and Optimization*, 6 巻, 2016 年, 96 - 99 ページ, 査読有。  
<http://www.ijmo.org/vol6/511-D002.pdf>

〔学会発表〕(計5件)

Naoyuki Ishimura: Mathematical models for estimating the risk of epidemic outbreaks, 2018 8th International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM 2018), 2018年.

Naoyuki Ishimura: Evolution of copulas and its application to the dependence relation between exchange rates, Taiwan Society for Industrial and Applied Mathematics, 2018年.

石村直之: 社会現象を記述する微分方程式, 2017年度東京大学大学院数理科学研究科公開講座「現象を記述する微分方程式」, 2017年.

Naoyuki Ishimura: Discrete Stochastic Calculus and its Applications, 2017 7th International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM 2017), 2017年.

Naoyuki Ishimura: Recent Development of the Theory of Copulas and its Applications, 2016 6th International Conference on Applied Physics and Mathematics (ICAPM 2016), 2016年.

〔図書〕(計1件)

吉田善章, 永長直人, 石村直之, 西成活裕: 東京大学工学教程 基礎系数学 非線形数学, 丸善出版, 2016年, 113-158ページ(担当部分).

〔その他〕

ホームページ: <http://researchers.chuo-u.ac.jp/Profiles/4/0000356/profile.html>

6. 研究組織

主に個人研究として研究を遂行したため, 研究組織として特筆すべきことはない。

科研費による研究は, 研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため, 研究の実施や研究成果の公表等については, 国の要請等に基づくものではなく, その研究成果に関する見解や責任は, 研究者個人に帰属されます。