様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２６１４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９９３

研究課題名（和文）凸代数幾何と最適化理論

研究課題名（英文）Convex Algebraic Geometry and Optimization Theory

研究代表者
関口　良行（Sekiguchi, Yoshiyuki）

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：５０４３４８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：凸代数幾何の手法により，非負多項式の表現定理の研究，多項式最適化問題に対する半正定値緩和法の有限収束性に関する研究，特異な半正定値計画問題に対する摂動理論の研究を行った．主な研究成果は以下の通りである．
１．ニュートン図形を用いた最適性条件を応用し，非負多項式が冪級数環において二乗和になるための十分条件を得た．２．実多項式環上のイデアルの実根基を用い，多項式最適化問題において，目的関数が制約式から生成される二次加群に含まれないにも関わらず，半正定値緩和法が有限収束する幾何的な条件を得た．３．特異な半正定値計画問題の係数行列を摂動したとき，最適値が連続に変化するための十分条件を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
多項式最適化問題に対する半正定値緩和法の理論的背景を強化し，最適性条件と多項式の表現定理との新たな関係を明らかにした．また今まで注目されていなかった facial reduction sequence を用いることにより，特異な半正定値計画問題の摂動理論を構築した．これらの研究は，最適化理論の研究において対象を多項式に限定することで，代数幾何のアイデアを用いており，最適化理論の新しい展開とより実用的な理論の構築に貢献するものである．

研究成果の概要（英文）：We studied representation theorems for nonnegative polynomials, a finite convergence property of a semidefinite relaxation method for polynomial optimization problems and perturbation analysis of singular semidefinite programming problems. The main contributions of our work are the following:
1. We obtained sufficient conditions for a nonnegative polynomial to be a sum of squares of power series using optimality conditions with Newton diagrams. 2. We gave a geometric condition with real radicals for a semidefinite relaxation of a polynomial optimization problems to have a finite convergence property in the case that the objective function is not contained in the quadratic module generated by constraint polynomials. 3. We obtained sufficient conditions for optimal values of perturbed singular semidefinite programs to change continuously.

研究分野：最適化理論

キーワード：最適化理論　半正定値計画問題　凸代数幾何　実代数幾何

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

凸代数幾何とは、代数幾何と最適化理論を融合させた分野である。特に、実代数幾何、計算代 数、関数解析、凸解析などの手法により、凸でない最適化問題に潜んだ凸構造を発見し、それらを用いて問題を解析するところに特徴がある。また、最適化問題に現れる様々な凸性そのものを、代数幾何的なアイデアを取り入れ研究することも、凸代数幾何の重要なテーマである。

本課題では、多項式最適化問題の有限近似性定理の精緻化、多項式系の不変式の生成元を計算する確率的アルゴリズムの構築、様々な最適性条件と非負多項式の表現定理との関係の解明を行う。また、凸解析におけるファルカスの補題、ハミルトニアンなどの基本概念と、実代数幾何における実零点定理、スペクトル多面体との関係を解明する。

２．研究の目的

多項式最適化問題に対して、問題が非凸であるにも関わらず、大域最適解を解析的に求めるアルゴリズムが J.-B. Lasserre などにより発見された。そのアルゴリズムは、多項式最適化問題か ら無限個の半正定値計画問題の列を生成し、それらの最適値の列が元の問題の大域最適値に収束 するというものである。

(1) 非負多項式の表現と有限近似性:最適性条件とグレブナー基底

最適解において、ある二次の最適性十分条件が満たされていれば、有限個の半正定値計画を解くことで大域最適値が求まることが知られている(多項式最適化問題の有限近似性)。申請者は、まだ十分吟味されていない有限近似性の十分条件の精緻化と整理を行う。

(2) Stengle の実零点定理と内点法の収束性

生成された半正定値計画問題は、通常内点法を用いて解く。その際、半正定値計画問題で強双対性が成り立つことが必要となる。これまで申請者は共同研究により、実代数幾何の概念である実イデアルの性質を用いて、強双対性が成り立つ条件を発見している。一方で、M. Laurent と J. Nie それぞれによって、全く異なる条件と手法により強双対性が成り立つことが示されている。 本課題では、すべての定理で重要な役割を果たしている Stengle の実零点定理に注目し、三つの 結果の統合する定理の発見を目指す。

(3) 不変式の生成元を計算する確率的アルゴリズムの構築と半正定値計画問題のサイズ縮小

多項式最適化問題の目的関数と制約式が、ある群に対する不変式である場合には、その不変式環の生成元を用いて、近似に必要な半正定値計画問題のサイズを大幅に縮小できることが知られている。しかし、この結果は不変式環の生成元が既知の場合にしか適用できない。一方、個々の半正定値計画問題において、未知の対称性を発見する確率的アルゴリズムが知られている。本課題では、この確率的アルゴリズムを参考に、多項式最適化問題の対称性が未知の場合に、生成されるすべての半正定値計画問題に共通する対称性を発見する確率的アルゴリズムの構築を目指す。

(4) 多項式環上の二次加群の所属問題:最適性条件とニュートン図形

半代数的集合上の非負多項式は、各最小解が二次の最適性十分条件を満 たすとき、定義多項式による二次加群の元として表現できる。本課題では、最適化理論の研究を通じて考察してきた様々な最適性条件と、この表現定理との関係を調べる。

(5) スペクトル多面体、双対多様体と凸解析

双対性は凸解析においても代数幾何においても重要な概念である。近年、半正定値計画問題の実行可能領域であるスペクトル多面体(およびその射影)の研究が、双対性等を交えながら盛んに行われている。スペクトル多面体は、通常の多面体のように様々な良い性質を持つ一方で、一般にはより複雑な構造を持ち、まだ解明されていないことも多い。特に、実代数幾何におけるタルスキ-ザイデンベルグの定理、Stengle の実零点定理と、 凸解析におけるフーリエ-モツキンの消去法、ファルカスの補題、共役関数、ハミルトニアンなどを結びつけ、スペクトル多面体の構造を解明する。

３．研究の方法

(1)「Stengle の実零点定理と内点法の収束性」では、多項式最適化問題から生成される半正定値 計画問題で強双対性が成り立つための条件を調べる。半正定値計画問題の解法としては、主に内 点法が用いられる。その際、内点法の収束を保証するためには、半正定値計画問題の最適値とその双対問題の最適値が一致する(強双対性)ことが必要である。申請者は、共同研究により、強双対性の十分条件が、多項式最適化問題の制約式から生成される二次加群の性質で表せることを発見している。一方で、全く異なる条件下で強双対性を示している研究もあり、本課題では、すべての定理で重要な役割を果たしている Stengle の実零点定理に注目し、 三つの結果の統合を目指す。

(2) 「多項式環上の二次加群の所属問題:最適性条件とニュートン図形」に関する研究を行う。あまり知られてはいないが、多項式の指数ベクトルから生成される凸多面体であるニュートン図形を用いて、最適性十分条件を与えることができる。この最適性条件と非負多項式の二次加群の所属問題との関係を調べる。本課題では、申請者がこれまでに得た局所環上の二次加群に対する結果を発展させることで、多項式環上の二次加群に対する結果を得ることを目指す。

(1),(2)の課題では、最適化問題の解析に適した代数幾何と計算代数の概念、手法を収集する必要がある。代数幾何と最適性条件との関係を調べる試みは新しく、様々な最適性条件を調べ

直す必要がある。そのため、代数幾何·計算代数関係図書と最適化理論関係図書を購入する。また、具体例の解析や予想を立てるために、コンピュータ上での数値実験を行う。数値実験は、ノート型 PC 上でも行える体制にし、他の研究者との討論においても活用する。最適化に関する最も大きな国際会議である International Symposium on Mathematical Programming、代数幾何の応用研究をテーマとする国際会議 SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry、および国内の研究集会に参加し、成果発表、情報収集、研究者との交流を積極的に行う。研究では、特にドイツのコスタンツ大学に所属する M.Schweighofer とその研究グループとの情報交換、研究協力を活用する。研究協力者である M.Schweighofer は実代数と最適化理論の融合研究におけるドイツのフロントランナーの一人であり、既存の結果との比較、最新の結果についての情報収集などで協力する。
(3)「非負多項式の表現と有限近似性:最適性条件とグレブナー基底」では、有限個の半正定値計画問題を解くことで、多項式最適化問題の大域最適値が得られる(多項式最適化問題の有限近似性)ための条件と、様々な最適性条件との関係を調べる。つい最近、ある 2 次の最適性条件が満たされていれば、有限近似性が成り立つことが発見された。しかし、有限近似性の十分条件はまだ十分吟味されたとは言いがたく、本課題では条件の精緻化と整理を行う。すでに、グレブナー基底を用いて鍵となる補題を得ており、現在さらに研究を 進めている。
平成 28 年度以降も、本課題は非常に新しく先進的な分野であるため、代数幾何·計算代数関係 図書と最適化理論関係図書の購入を引き続き行う。また、関連分野が多岐にわたるため、多面体 や離散数学、計算機科学等の研究会などにも参加し、異分野の研究者との交流を積極的に行う。 また得られた成果を国内外の研究集会で発表する。

４．研究成果
(1) 多項式の最小値を求める際、停留点においてヘッセ行列が退化している場合は、ヘッセ行列の正値性より最適性を判定することができない。しかし、ニュートン図形とその辺に付随する多項式を調べることで、局所最適性を判定することができる。これらの条件を応用し、与えられた非負多項式がべき級数環上の二乗加群に属するための十分条件を与えた。この結果は、多項式最適化問題の半正定値緩和法の収束性と深い関係を持つ。
(2) 実代数において用いられる Real Radical(実根基)と、多項式最適化問題の緩和半正定値計画問題の双対性、有限収束性との関係を調べた。特に双対性については、打ち切り二次加群が必ずしも閉集合にならない場合を考察している。
(3) 特異な半正定値計画問題に対して、感度分析を行った。半正定値計画問題では、右辺の摂動に関しては、緩やかな条件下で最適値が連続に変化する。しかし、係数行列を摂動した場合、たとえ主問題が正則(Slator 条件を満たす)であっても、最適値が不連続に変化する場合がある。今まで注目されていなかった Facial Reduction Sequence を用いて、最適値が連続的に変化するような摂動方向を求めた。結果を論文にまとめ現在投稿中である。

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計　3　件）
① Yoshiyuki Sekiguchi, Notes on optimality conditions using Newton diagrams and sums of squares, Serdica Mathematical Journal, 査読有, 41 (2015), 431-456.
② 関口良行, 最適化理論と実代数幾何, Mita journal of economics, 査読無, Vol.108, No.3 (2015), p.505- 519
③ Yoshiyuki Sekiguchi, Real radicals and finite convergence of polynomial optimization problems, Advances in Mathematical Economics,査読有, 20 (2016), 89-99

〔学会発表〕（計　4　件）
① Y. Sekiguchi, SIAM Conference on Algebraic Geometry, Deajoung, Korea, Optimality conditions using Newton diagrams and sums of squares, 2015.8.4
② Y. Sekiguchi, Research Seminar on Real Geometry and Algebra in University of Konstanz, Konstanz, Germany, Perturbation analysis for singular semidefinite programming, 2016.4.22
③ Y. Sekiguchi, Research Seminar on Discrete Mathematics, Geometry and Optimization in University of Frankfurt, Frankfurt, Germany, Perturbation analysis for singular semidefinite programming, 2017.1.31
④ Y. Sekiguchi, SIAM Conference on Optimization, Vancouver, Canada, Perturbation Analysis of Singular Semidefinite Programming via the Facial Reduction, 2017.5.22

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。