

令和元年5月7日現在

機関番号：17101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K05001

研究課題名（和文）期待値の発散する確率的ゲームの研究

研究課題名（英文）Research on stochastic games with infinite expectation

研究代表者

中田 寿夫（Nakata, Toshio）

福岡教育大学・教育学部・教授

研究者番号：10304693

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、倍賭けのゲームであるペテルスブルグのゲームを典型例とする期待値の発散する確率的ゲームを扱った。非負で期待値の発散する重い裾をもつ確率分布族を定義して、独立確率変数の和についての重み付きの大数の弱法則などを示した。また、一般化されたペテルスブルグのゲームに対する独立な確率変数の最大値の分布についての極限定理をえた。これらの結果により、重い裾の分布族の性質の一部が明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2018年には地震や大雨などの想定外の自然災害が日本列島を襲った。通常ではほとんど起きないと思われる事象であるものの、一旦起きてしまえば極端な値をとることが特徴であり、確率論として捉えるときには期待値が発散するような重い裾をもつ確率分布を用いてモデル化される。本研究はこのことについての理論的な研究の一つとして位置づけられる。自然災害の規模を具体的に評価するなどというような応用研究には直接的に結びつかないかもしれないが、基礎的研究として僅かに貢献できたものと考えている

研究成果の概要（英文）：This research explored probability distributions for stochastic games with infinite expectation which contain the St. Petersburg game as a typical example.

We defined several non-negative heavy-tailed probability distributions, and obtained some limit theorems such as weighted laws of large numbers. We also got a limit theorem for the maxima of independent random variables for the generalized St. Petersburg games. The results of this research reveal some of the properties of heavy-tailed distributions.

研究分野：確率論

キーワード：無限大の期待値 大数の弱法則 ペテルスブルグのゲーム 正則変動 裾確率 極値分布 Pareto 分布

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の研究開始前には「アルゴリズムの解析としての離散確率モデルの研究(研究代表者・中田寿夫・研究課題(21540133))」を行っており、流れとしてはその継続的な研究として位置付けられていた。倍賭けのゲームで古典確率論として有名な問題であるペテルスブルグのゲームは、確率的アルゴリズムとしても扱われ、研究開始前は確率的ゲームのアルゴリズムとしての側面を考察していた。素朴なアルゴリズムで記述されるこのゲームについて、対応する分布も単純な形の離散分布であるため、一見、扱いは容易であるように思える。しかしながら、この分布は期待値が発散する確率分布の中でも特別な存在であり、独特の特徴をもつ分布の認識から研究が始まった。つまり、期待値が発散すること以外の問題点の方が確率論としては重要であり、大変扱いにくいことが逆に問題を興味深くしているように感じられた。

その困難な点とは、第一に裾確率を関数としてみたときには正則変動関数とはならないことが挙げられる。そればかりか、劣指数的ですらなく、長い裾をもつ分布族にも属さない。このような状況のため、独立同分布列の統計的性質を扱う際に良く知られている数学的な道具が容易に適用できないという難点がある。例えば、実解析としての道具であるラプラス変換を効果的に使用するためのタウバー型定理を単純に適用することができない。道具だけでなく、確率現象としても大数の弱法則は成立するものの、自然な形で大数の強法則が成立しないことも知られている。

2. 研究の目的

上記のような困難な点を克服するために、確率変数を切断したり、確率変数に重みをつけたりすることに着目して極限定理をえるべく研究を進めた。その際、ペテルスブルグのゲームから作られる分布そのものだけでなく、それを典型的に含む分布族を考えて統一的に扱った。さらには派生的な分布を考え、裾確率のオーダーに着目した非自明な分布族を考えた。これらの分布族を定めた後に独立同分布列の和や最大値などの性質を明らかにすることを目標とした。具体的には以下の3つの分布族について考察した。

- (1) 裾確率が-1次の多項式オーダーで漸近的に減衰する分布族
- (2) 切断平均が対数のオーダーとなる非負の離散分布族
- (3) 裾確率の関数が指数-1で正則変動し、単純なパラメータを含む Pareto 分布族

これらの分布族を調査することにより、ペテルスブルグのゲームの位置付けの理解を深めることを目指した。さらには、上記の分布族(1),(2),(3)と並行して以下の研究も進めた。

- (4)ペテルスブルグのゲームに対する分布自体から導かれる極限定理

3. 研究の方法

当初は「研究の目的」で述べた(1)の分布族の研究を単独で行っていた。(1)の分布族について重み付きの大数の弱法則がどこまで成立するのかに着目して考察した。基本的には確率変数を切断して期待値の発散を克服することが常套手段である。実際、A. Adler とその共著者による1980年代末からの一連の研究により、重みを伴った大数の法則と確率変数の切断の関係が知られており、その手法を手掛かりに研究を進めた。(1)の分布族の大数の弱法則の研究を進めているうちに、裾確率が関数として正則変動関数とは限らないものの、切断された確率変数の期待値が切断の位置に対して対数のオーダーとなる場合に着目して分布族を定めた。この研究は研究協力者である統計数理研究所の志村隆彰准教授とともに進めた。この性質をもつ離散分布族の標準形というべき分布を定めて、単純な条件の下で確率分布が漸近的にどのように振る舞うのかに注目して調査した。

また、(1)の分布族の研究はAdler (2012)の独立な Pareto 分布に関する結果を拡張する結果を含んでいた。そこで、裾確率の関数が-1のオーダーで正則変動して期待値が発散する(3)の Pareto 分布族を単独研究として行い、必ずしも同分布性をみたさない単純な分布族として考察した。

さらに、(4)のペテルスブルグのゲームに対する分布については、Gut, Martin-Lof (2015), Berkes (2015) などの刈り込み和(trimmed sum)と最大値の新しい研究から動機づけられたものである。彼らは上記の期待値の発散と正則変動性をみたさない困難性を独立同分布確率変数列の最大値をとり除くことにより克服した。本研究では、最大値をパラメータの調節を行うことにより、別の視点から研究を進めた。

4. 研究成果

「研究の目的」の(1)(2)(3)の分布族の研究と(4)についてそれぞれ研究成果をまとめる。

(1)の分布族の研究： 同分布性を必ずしもみたさない分布について、重みのある大数の弱法則をえるための十分条件を与えた。少々強い条件ではあるが、単純でチェックしやすい形である。それをういて、Adler (2012)の独立な Pareto 分布に関する大数の弱法則の結果を自然に拡張することができた。それだけでなく、条件を整備したことにより、細部が単純化されて見通しが

よくなった。さらには、独立同分布の場合の結果も言及して、定理の適用例をいくつか与えた。これらの結果は、Adler (2017), Ma et al. (2018), Dung et al. (2018), Chen, Sung (2018), Yang et al. (2019) などにより、独立性を弱めた条件などで拡張するなどの関連研究が発表されている。

(2)の分布族の研究： 切断平均が対数のオーダーとなる非負の離散分布族についての標準形というべき分布族を与えた。分布の台の位置がどの速さで発散していくかということに着目しながら、分布族の裾確率に関する基本的な性質を分類した。単純な形をした分布族ではあるものの、裾確率の関数が正則変動なものそうでないものを含んでいるが、ペテルスブルグのゲームの分布を含んでいるため、例外的な裾の振舞いをすることもある。このように分布族として扱うことによってペテルスブルグのゲームの分布の位置付けを確認することができた。さらに、この分布族の独立同分布列についての最大値の分布の性質についても調べ、最大値を達成する確率変数の数が1となる条件についても結果をえた。

(3)の分布族の研究： 独立な Pareto 分布に従う確率変数の和についての Adler (2017) の結果に関する補足的な結果といえる。自然な方法を採用すると大数の弱法則は成立するものの、「多くの場合は確率1で上極限が無限大に発散してしまい、弱法則を強法則に自然には強めることができない」というのが彼の主な主張であった。単純な条件で記述された命題を用いて、その主張が正しいことを追認しつつも、Pareto 分布のパラメータに応じてスケーリングのパラメータを明示的に与え、弱法則だけでなく強法則に強める場合も存在することを指摘した。

(4)ペテルスブルグのゲームの分布の研究： 一般化ペテルスブルグのゲームであられる確率変数の最大値の分布の漸近挙動の結果をえた。Anderson et al. (1997) による、Poisson 分布に対してパラメータを調節させながら Gumbel 分布に収束させる手法を適用させ、Frechet 分布に分布収束させることに成功し、さらには Berkes et al. (1999) のマージ収束についての収束の速さに対応する評価をえた。

本研究の結果は国内外で発表し、(1), (3), (4)の結果は英文雑誌により公表している。国内での主な口頭発表の場を統計数理研究所で開催される共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」としており、実際、2015年 2018年まで毎年報告した。国外では、2016、2017、2018年の3年間にそれぞれトロント、デルフト、ブリュッセルで開催された比較的規模の大きな研究集会において発表した。そのうち、トロント、デルフトでの集会では研究協力者である志村隆彰准教授とともに発表することができた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計10件)

中田 寿夫、期待値の発散するパレート分布についての重みつきの大数の法則、統計数理研究所共同研究レポート、査読無、418巻、2019、pp. 92 - 99

中田 寿夫、The maxima for the generalized St. Petersburg game, 統計数理研究所共同研究レポート、査読無、402巻、2018、pp.129 - 132

Toshio NAKATA, Exact laws of large numbers for independent Pareto random variables, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series), 査読有、Vol. 12, No. 4, 2017, pp. 325 - 338

DOI: 10.21915/BIMAS.2017403

Toshio NAKATA, A note on the asymptotics of the maxima for the St. Petersburg game, Stat. Prob. Lett., 査読有、Vol 129, 2017, pp. 284 - 287

DOI:10.1016/j.spl.2017.06.010

中田 寿夫、志村 隆彰、切断平均が対数オーダーとなる離散的な分布に関する最大値の性質について、統計数理研究所共同研究レポート、査読無、385巻、2017、pp. 68 - 73

中田 寿夫、無限大の期待値をもつ重みつき独立な確率変数列に関する大数の弱法則の例、統計数理研究所共同研究レポート、査読無、352巻、2016、pp. 73 - 79

志村 隆彰、中田 寿夫、切断平均が対数オーダーになる離散分布について、統計数理研究所共同研究レポート、査読無、352巻、2016、pp. 84 - 90

Toshio NAKATA, Weak laws of large numbers for weighted independent random variables with infinite mean, Stat. Prob. Lett., 査読有、 Vol 109, 2016, pp. 124 129

DOI :10.1016/j.spl.2015.11.017

Toshio NAKATA, Limit theorems for nonnegative independent random variables with truncation, Acta Mathematica Hungarica, 査読有、 Vol 145, 2015, pp. 1 16

DOI: 10.1007/s10474-014-0474-5

Toshio NAKATA, Limit distributions of generalized St. Petersburg games, Stat. Prob. Lett., 査読有、 Vol 96, 2015, pp. 307 314

DOI: 10.1016/j.spl.2014.10.010

[学会発表](計 18 件)

中田 寿夫, 期待値の発散するパレート分布についての重み付きの大数の法則、統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2018 年

Toshio NAKATA, Laws of large numbers for independent Pareto random variables with infinite mean, 12th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics and 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics, 2018 年

志村 隆彰, 極値理論とリスク管理、リスク解析戦略研究センターシンポジウム、2018 年

中田 寿夫, The maxima for the generalized St.Petersburg game, 日本数学会 2018 年度年会、2018 年

Takaaki SHIMURA, Toshio NAKATA, Discrete distributions whose truncated means have logarithmic order, The 10th international conference on Extreme Value Analysis, 2017 年

Toshio NAKATA, The asymptotics of the maxima for the distribution of the St.Petersburg game, The 10th international conference on Extreme Value Analysis, 2017 年

中田 寿夫, The maxima for the generalized St.Petersburg game, 統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2017 年

中田 寿夫, ペテルスブルグのゲームの分布の極限定理, 広島大学理学研究科数学専攻談話会、2017 年

中田 寿夫, Exact laws of large numbers for independent Pareto random variables, 広島確率論・力学系セミナー、2017 年

中田 寿夫, 志村 隆彰, 切断平均が対数オーダーとなる離散的な分布に関する最大値の性質について、統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2016 年

中田 寿夫, 期待値が発散する確率変数列の極限定理, 第 135 回 日本数学会九州支部例会、2016 年

Takaaki SHIMURA, Toshio NAKATA, Variety of distributions with asymptotically logarithmic truncated mean, World Congress in Probability and Statistics, (ポスター発表) 2016 年

Toshio NAKATA, Weak laws of large numbers for weighted independent random variables with infinite mean, World Congress in Probability and Statistics, 2016 年

中田 寿夫, 無限大の期待値をもつ重み付きの独立な確率変数列に関する大数の弱法則, 日本数学会 2016 年度年会、2016 年

志村 隆彰, 平均が同じように発散する分布の多様性 研究集会「安定分布・安定過程とその周辺」、2016 年

中田 寿夫, ランダムウォークの隠れた性質と隠れたモデルについて、研究集会「安定分布・安定過程とその周辺」、2016 年

志村 隆彰, 中田 寿夫, 切断平均が対数オーダーになる離散分布について、統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2015 年

中田 寿夫, 無限大の期待値をもつ重み付きの独立な確率変数列に関する大数の弱法則の例、統計数理研究所共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2015 年

[図書](計 1 件)

高橋 倫也, 志村 隆彰, 極値統計学、近代科学社、極値統計学、2016 年、262 ページ

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者
なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：志村 隆彰

ローマ字氏名：(SHIMURA, takaaki)

所属研究機関名：統計数理研究所

部局名：数理・推論研究系

職名：准教授

研究者番号（8桁）：40235677

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。