

平成 30 年 6 月 10 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K05012

研究課題名(和文)無限次元非線形数理モデルに対する高精度数値的検証理論の構築

研究課題名(英文)A study on the numerical verification method of solutions with high accuracy for the nonlinear mathematical models in infinite dimension

研究代表者

中尾 充宏 (NAKAO, Mitsuhiro)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究者

研究者番号：10136418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：楕円型および放物型方程式をはじめとする無限次元数理モデルに対し、解を精度保証付きで検証する手法の定式化とその拡張・改良を行った。非線形問題の検証で重要な、線形化作用素に対する逆作用素ノルムの数値評価について、高効率・高精度な計算法を開発し実用性を立証した。また、高い正則性を持つ楕円型方程式の解の高精度評価法を導出し、その有効性を示した。半離散化された熱方程式に対して、基本解行列を用いて時間方向を近似する全離散有限要素スキームに対し、最良オーダーの構成的a priori誤差評価を導出した。さらに一般的な関数空間設定のもとで無限次元Newton型検証法を定式化し具体的な適用例を示した。

研究成果の概要(英文)：We studied the numerical verification method of solutions for infinite dimensional nonlinear mathematical models including elliptic and parabolic equations. We presented several computational techniques for the numerical estimations of the linearized inverse operators associated with nonlinear problems. From the viewpoint of efficiency and accuracy in the verified computations, we proposed several techniques which enables us the actual effectiveness by showing numerical examples related to elliptic problems of second and fourth order. We also derived the constructive a priori error estimates with optimal order for a full discrete numerical scheme of the heat equation, which is based on the finite element Galerkin method with an interpolation in time using the fundamental matrix for ODEs. Furthermore, under the general setting in Hilbert space, we presented a principle of the verified computational method of solutions using Newton-type formulation.

研究分野：計算数学

キーワード：精度保証付き数値計算法 解の数値的検証 数値解析 解の事後誤差評価 計算機援用証明

### 1. 研究開始当初の背景

近年のハード・ソフト両面における情報処理技術のめざましい発展と相まって、応用解析学や計算理工学に現れる複雑な非線形問題を解決する上で、理論解析が困難な問題に対する数値計算による証明(計算機援用証明)の意義と重要性はともに高まっている。また、このような証明法は、数値シミュレーションの信頼性を数学的に保証するという副産物も得られるため、種々の計算科学上でも不可避的な重要課題となりつつある。研究代表者(中尾)は、早い時期からそういった意義の本質に着目し、主として楕円型偏微分方程式に対する解の存在を計算機により立証する、という研究姿勢のもとに、この分野において常に世界に先駆けた研究業績を蓄積してきた。最近では、数学界においても特に力学系研究グループを中心として、偏微分方程式も含めた非線形力学系に対する計算機援用証明が重要な研究手段として用いられるようになってきた。しかしながら、このようなアプローチが可能な数値モデルの対象は未だ十分広いとは言えず、常微分方程式と一部の偏微分方程式に限定されたものとなっている。

特に偏微分方程式の場合には、その誤差評価が複雑で精度も不十分なために適用対象が限定され、応用解析学上に現れる多くの実際的な非線形問題に対し、その実用性は未だに高いとは言えない。

### 2. 研究の目的

数値的検証法(以下、「精度保証付き数値計算法」と同義)とは、問題に対する解の存在と誤差限界を数学的に保証するような数値計算法のことであり、計算機を使った数値的証明をも意味している。本研究は、前項で述べた現状を開拓するために、既存の誤差評価手法を見直し、より強力な検証方式を理論的および計算工学的両面から構築し、その有効性を格段に高めることを目的とするものである。すなわち、研究代表者がこれまでに開発してきた楕円型方程式を中心とした数値的検証法の原理を、放物型方程式を含めてさらに広範な無限次元の非線形数値モデルにまで拡張することに取り組むものである。

そのために以下の到達目標を掲げる。

- (1) 非線形楕円型および放物型方程式の解に対する数値的検証(精度保証)において無限次元ニュートン法を適用する場合、それらの線形化逆作用素のノルム評価が本質的な役割を果たすため、その高効率化を実現する。
- (2) Poisson 方程式の近似解(有限要素解またはスペクトル近似)に対する高精度 a priori 誤差評価のために、解の正則性を前提として高階微分を活用した新たな高精度(高次オーダー)評価式の導出を図る。
- (3) 簡単な熱方程式の全離散解に対する

構成的誤差評価において、初期値および強制項(方程式の右辺)の滑らかさを前提とした、高精度 a priori 評価法を定式化し、検証数値例を示すことによって、その有効性を示す。また、時間発展的に放物型方程式の解を検証する手法について検討する。

- (4) 楕円型および放物型方程式で記述される実際の非線形現象記述する数値モデルに対し、(2) \ (3) で得られた高精度評価にもとづく検証方式を定式化し適用することによって、数値的検証の現実問題に対する有効性を実証する。
- (5) 自励系および非自励系の放物型方程式について、その周期解に対する数値的検証法の定式化を行い、反応拡散方程式等の無限次元力学系の実際問題に適用を図る。

### 3. 研究の方法

研究代表者は、これまで楕円型方程式および放物型方程式の解に対する数値的検証法(精度保証付き数値計算)について、世界的レベルで多くの成果を蓄積してきた。本研究ではそれらの研究成果の上に新たな知見を重ねて、一層優れた数値的検証法の確立を目指す。特に定常問題(楕円型)および発展問題(放物型)のそれぞれについて、従来手法を、より高精度な検証原理のもとに再定式化し、実際問題の数値的検証に適用することによって、その効率性・有効性を示すとともに、既存精度保証方式のさらなる改良に努める。これらの検討は、これまでも理論と数値計算の両面において、代表者を支援してきた連携研究者と協同して実施する。

連携研究者の渡部は、有限次元から無限次元問題の精度保証全般の理論と実装の両面に深く精通しており、従来手法を見直す形での高精度検証方式にも強い関心と意欲を示している。同じく連携研究者の木下は、研究代表者との間で、既に楕円型・放物型の両者に関する共同研究の実績を有しており、同氏には特に関数解析的なアプローチを基盤とする理論面に優れた貢献を期待できる。一方、連携研究者の木村は、数値計算法全般の実装技術に加えて理論的考察能力にも優れ、佐世保高専学術研究員の時代(2010-2011年度)から代表者とともに、主として発展方程式の解に対する数値的検証法に関する共同研究を推進してきた。同氏は所属場所に関わらず、今後とも密接な協力体制のもとで検討を進める予定である。

研究代表者は、これらの連携研究者以外にも、従来から同じ分野の研究に関与する電気通信大学や早稲田大学等の研究グループなど、多くの優れた研究者との緊密な連携体制を築いており、これらの関係者からの研究協力は常時仰ぐことのできる環境にある。また、本研究の遂行に当たっては、海外共同研究者

としてドイツ Karlsruhe 大学の M. Plum 教授にも研究協力を依頼する。同教授は、偏微分方程式の解に対する数値的検証に関し多くの実績をもつ優れた研究者である。同氏との間では既に共同研究の実績もあり、今後とも一層緊密な情報交換を行いつつ研究を進める。

#### 4. 研究成果

研究代表者と連携研究者および海外共同研究者が研究目的にしたがって恒常的に検討を進め、以下の成果が得られた。

これらの成果は、偏微分方程式の解に対する数値的検証法を含め、精度保証付き数値計算法の研究進展に対して大きく貢献するものである。

- (1) 熱方程式の初期値境界値問題の空間方向半離散化後の線形常微分方程式系に対し、基本解行列を用いて全離散を与える近似スキームについて、解の高階微分を用いることによって、空間・時間のメッシュサイズによらず最良オーダーの構成的誤差評価が得られることを示した。
- (2) Poisson 方程式の解がその定義域によって、高次の正則性を持つ場合、それを反映した有限要素解の高次精度の構成的誤差評価について考察し、実際問題に適用することによってその有効性を示した。
- (3) 重調和方程式の有限要素解に対する汎用性を持った構成的誤差評価方式を与え、数値例によってその実用性を検証した。
- (4) 線形楕円型作用素に対する逆作用素のノルム評価において、現れる行列操作によって無限次元の意味でのノルム評価が効率的に算定できる場合のあることを示した。
- (5) 抽象 Hilbert 空間での一般的な問題設定のもとで、線形作用素の逆作用素評価を有限次元射影とその構成的誤差評価を用いて実現するための定式化を行い、実際に楕円型作用素の逆作用素ノルムの計算に適用し、十分な実用性を検証した。
- (6) 一般的な関数空間設定のもとで無限次元ニュートン法を数値的に実現する手法を定式化し、その適用例を与えた。
- (7) 流れ関数を用いた Navier-Stokes 方程式の表現の中で現れる非線形写像のコンパクト性を証明した。
- (8) 矩形領域における楕円型方程式の解を高精度で効率よく数値検証するために、高次の直交多項式を用いた射影に関する再帰的な関係式を求めた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文](計 9 件)

[1] Y. Watanabe, M. T. Nakao, K. Nagatou, On the compactness of a nonlinear operator related to stream function-vorticity formulation for the Navier-Stokes equations, JSIAM Letters 9 (2017), 77-80. (査読有) doi.org/10.14495/jsiaml.9.77

[2] T. Kimura, T. Minamoto, M. T. Nakao, Optimal Order Constructive a Priori Error Estimates for a Full Discrete Approximation of the Heat Equation, Reliable Computing 25, Special volume containing refereed papers from SCAN 2016 (2017), 202-212. (査読有)

<https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-25/reliable-computing-25-pp-202-212.pdf>

[3] T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao, Validated Constructive Error Estimations for Biharmonic Problems, Reliable Computing 25, Special volume containing refereed papers from SCAN 2016 (2017), 168-177. (査読有)

<https://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/volume-25/reliable-computing-25-pp-168-177.pdf>

[4] T. Kinoshita, Y. Watanabe, N. Yamamoto, M. T. Nakao, Some remarks on a priori estimates of highly regular solutions for the Poisson equation in polygonal domains, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 33 (2016), 629-636. (査読有) DOI: 10.1007/s13160-016-0223

[5] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, M. T. Nakao, Norm bound computation for inverses of linear operators in Hilbert spaces, Journal of Differential Equations, 260 (2016), 6363-6374. (査読有)

doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.041

[6] T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao, Some remarks on the rigorous estimation of inverse linear elliptic operators, SCAN 2014, LNCS 9553, the proceedings of the conference '16th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics' (2016), 225-235. (査読有) DOI:10.1007/978-3-319-31769-4-18

[7] Y. Watanabe, M. T. Nakao, A numerical verification method for nonlinear functional equations based on infinite-dimensional Newton-like iteration, Applied Mathematics and Computation, 276 (2016), 239-251. (査読有)

doi:10.1016/j.amc.2015.12.021

[8] T. Kinoshita, Y. Watanabe, M. T. Nakao, Recurrence relations of orthogonal

polynomials in  $H_0^1$  and  $H_0^2$ , Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE Vol. 6 No. 3 (2015), 404-409. (査読有) <http://doi.org/10.1587/nolta.6.404>  
 [9] M. T. Nakao, Y. Watanabe, T. Kinoshita, T. Kimura, N. Yamamoto, Some considerations of the invertibility verifications for linear elliptic operators, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 32 (2015), 19-31. (査読有)  
 DOI:10.1007/s13160-014-0160-6.

〔学会発表〕(計 23 件)

- (1) 渡部 善隆、木下武彦、中尾 充宏, Laplacian ノルム評価を援用した楕円型線形作用素の可逆性検証日本応用数理学会 2018 年 研究部会連合発表会, 2018
- (2) Mitsuhiro T. Nakao, On the guaranteed error bounds of a new approximation scheme for parabolic problems, BIRS Workshop, Rigorous Numerics for Infinite Dimensional Nonlinear Dynamics, 2017
- (3) Mitsuhiro T. Nakao, On the numerical norm estimation of the inverse operator in Hilbert space, Dagstuhl Seminar, Reliable Computation and Complexity on the Reals, 2017
- (4) 木下武彦、渡部善隆、中尾充宏, 値域が共役空間となる 2 階楕円型作用素に対する可逆性検証法の改良, 日本応用数理学会 2017 年度年会, 2017
- (5) 木下武彦、渡部善隆、中尾充宏, Hilbert 空間における線形作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良, 日本数学会秋季総合分科会, 2017
- (6) 木下武彦、渡部 善隆、中尾 充宏, あるコンパクト作用素のレゾルベントに対する下側評価について, 2017 年度日本数学会年会, 首都大学東京, 2017
- (7) Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Mitsuhiro T. Nakao, An alternative approach of invertibility verifications for linear operators in Hilbert spaces, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2017(INVA 2017), 2017
- (8) Mitsuhiro T. Nakao, Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Some remarks on the numerical norm estimation of the inverse operator in Hilbert spaces, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2017(INVA 2017), 2017.
- (9) 中尾 充宏、長藤 かおり、渡部 善隆, Navier-Stokes 方程式に関する非線形作用素のコンパクト性証明, 日本応用数理学会研究部会連合発表会、電気通信大学、2017
- (10) 木下武彦、渡部 善隆、中尾 充宏,

- コンパクト作用素のレゾルベントに対する下側評価, 2016 年度応用数学合同研究集会、龍谷大学瀬田キャンパス、2016
- (11) 中尾充宏, 有限要素法の構成的誤差評価とその計算機援用証明への応用, RIMS 研究集会: 現象解明に向けた数値解析学の新展開 II、京都大学数理解析研究所、2016
  - (12) Takuma Kimura, Teruya Minamoto, Mitsuhiro T. Nakao, Optimal order constructive a priori error estimates for a full discrete approximation of the heat equation, Computer Arithmetics and Verified Numerics(SCAN 2016), Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2016.
  - (13) Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita and Mitsuhiro T. Nakao, Validated constructive error estimations for bi-harmonic problems, 17th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics(SCAN 2016), Uppsala University, Uppsala, Sweden, 2016.
  - (14) 渡部善隆、木下武彦、中尾充宏, 重調和方程式の近似解に対する構成的誤差評価, 2016 年度日本数学会秋季総合分科会、関西大学千里山キャンパス、2016
  - (15) 渡部 善隆、木下 武彦、中尾 充宏, Legendre 多項式による重調和方程式の精度保証付き誤差評価, 2016 年度日本応用数理学会年会、北九州国際会議場、2016
  - (16) M. T. Nakao, On the refinement of constructive a priori error estimates of the finite element methods with applications to verified computation for PDEs, The Sixth China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, NIMS, Daejeon, Korea, 2016.
  - (17) 渡部善隆、木下武彦、中尾充宏, 精度保証付き数値計算による平行 Poiseuille 流れの高精度不安定性解析, 日本数学会年会、筑波大学、2016
  - (18) 木下武彦、渡部 善隆、中尾 充宏, Hilbert 空間の線形作用素に対する逆作用素ノルム評価の改良, 日本応用数理学会 2016 年 研究部会連合発表会、神戸学院大学 ポートアイランドキャンパス、2016
  - (19) Takehiko Kinoshita, Yoshitaka Watanabe, Mitsuhiro T. Nakao, H3 and H4 regularities of the Poisson equation on polygonal domains, 6th International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, Berlin, Germany, November 11-13, 2015
  - (20) 木下武彦、渡部善隆、中尾充宏, H3

- 正則性を持つ一般多角形領域上の Poisson 方程式の解について、日本数学会秋季総合分科会、京都産業大学、2015
- (21) 木村拓馬、皆本晃弥、中尾充宏、放物型方程式の全離散近似解に対するオーダー最良な構成的誤差評価について、2015年度日本応用数理学会年会、金沢大学、2015
- (22) 渡部善隆、Nagatou Kaori、Plum Michael、中尾充宏、線形化、Kolmogorov 問題に対する固有値の除外について、2015年度日本応用数理学会年会、金沢大学、2015
- (23) Mitsuhiro T. Nakao, On constructive higher order a priori error estimates of the finite element methods with applications to validated computation for PDEs, Workshop, Nonlinear PDE days, Karlsruhe, Germany, 2015

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中尾 充宏 (NAKAO, Mitsuhiro)  
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究者  
研究者番号：10136418

### (2) 研究分担者 ( )

### (3) 連携研究者

渡部 善隆 (WATANABE Yoshitaka)  
九州大学・情報基盤研究開発センター・

准教授

研究者番号： 90243972

木村 拓馬 (KIMURA, Takuma)  
佐賀大学・理工学部・准教授  
研究者番号： 60581618

木下 武彦 (KINOSHITA Takehiko)  
京都大学・学際融合教育研究推進センター・特定講師(2017年3月まで)  
研究者番号： 30546429

### (4) 研究協力者

Michael Plum  
Karlsruhe 大学(ドイツ)・教授