

令和元年5月31日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K05043

研究課題名(和文) ODE/IM対応に基づく超対称ゲージ理論の解析

研究課題名(英文) Analysis of supersymmetric gauge theories based on ODE/IM correspondence

研究代表者

伊藤 克司 (Ito, Katsushi)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：60221769

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：常微分方程式と量子可積分模型の非自明な対応(ODE/IM対応)を超対称ゲージ理論の強結合領域の物理に応用し、以下の結果を得た。(1) アフィンリー代数に基づく変形戸田方程式に付随する線形微分方程式の接続問題を解析し、量子可積分模型のベータ方程式を導出した。(2) SU(3)型パラフェルミオン模型の2パラメータ可積分摂動とHomogeneous sine-Gordon模型の有効質量パラメータの間の厳密な関係式を決定した。(3) オメガ背景場中のN=2超共形場理論(Argyres-Douglas理論)の量子Seiberg-Witten曲線と量子可積分系の非自明な対応を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

強結合する場の量子論は、摂動論などのこれまでの伝統的な解析方法では解析が困難である。例えば、陽子や中性子の基本構成粒子であるクォークを単独で取り出すことができないこと(クォークの閉じ込め)の厳密な証明はない。その困難さは理論が強結合であることに起因している。本研究は、超対称性ゲージ理論において量子可積分模型を解析する手法が強結合ゲージ理論の物理を解析する上で有効であることを示したものである。ここで用いられた方法(ODE/IM対応)は場の理論の問題のみならず、他の物理分野(PT-symmetric quantum mechanics, resurgence等)への応用が期待されている。

研究成果の概要(英文)：The ODE/IM correspondence describes a non-trivial relation between ordinary differential equations and quantum integrable systems. We applied the ODE/IM correspondence to supersymmetric gauge theories in the strong coupling region and obtained the following results. (1) We studied the connection problem of the linear differential equations associated with the modified affine Toda field equations based on an affine Lie algebra and obtained the Bethe ansatz equations associated with the quantum integrable models. (2) We studied the two parameter integrable deformations of SU(3) parafermion theory and found the exact formula between the deformation parameters and the effective masses of the Homogeneous sine-Gordon model. (3) We found non-trivial relations between the quantum Seiberg-Witten curve of N=2 superconformal field theories (Argyres-Douglas theories) and the quantum integrable models.

研究分野：素粒子論

キーワード：超対称性 量子可積分模型 ODE/IM対応 共形場理論

1. 研究開始当初の背景

ゲージ理論の強結合領域におけるダイナミクスは、クォークの閉じ込め問題や対称性の破れ等の物理を理解するために重要である。そのダイナミクスの本質的解明には伝統的な摂動論的、数値的手法に加え、新しい理論的研究方法の開発が望まれる。さらにこうした強結合領域の場の理論は、重力を含む素粒子の統一理論として有力である超弦理論の強結合極限と考えられる M 理論の理解のためにも重要である。この理論の基本構成物体である M5 プレーン上の場の理論は、強結合で非局所的であり、そのラグランジアンさえ書くことができない。そのため摂動論的なアプローチが通用せず、標準的な場の理論的な手法によらない新しい研究手法が必要となる。

最近、この強結合ゲージ理論の研究に大きな進展が見られる。例えば $N = 4$ 超対称ゲージ理論におけるグルーオン散乱振幅は、超弦理論における、グルーオンの外線運動量に対応する光的境界を持つ Wilson ループの期待値と一致し、さらに AdS/CFT 対応を用いると、その期待値は Wilson ループで囲まれる極小曲面の面積で表される。Alday-Maldacena は、 AdS_5 の部分空間である AdS_3 空間における極小曲面の方程式が、変形 Sinh-Gordon 方程式になることを示した。それを使って極小曲面の問題をスペクトラルパラメータの入った Hitchin 方程式に附随する平坦切断の線形方程式を解く問題に帰着させた。さらに Alday-Maldacena-Sever-Vieira は、線形問題の解の Wronski 行列式が量子可積分模型における T-系の関数方程式をみたし、線形方程式の漸近解の接続公式である Stokes 係数が Y-系という関数関係式を満たすことを示した。さらにこの Y-系から導かれる熱力学的ベータ仮説 (TBA) 積分方程式の自由エネルギーにより極小曲面の面積が表されることが明らかになった。初田-伊藤-酒井-佐藤は、 AdS_3 空間の $2n$ 点振幅に相当する極小曲面の TBA 方程式を導出し、対応する可積分模型が homogeneous sine-Gordon 模型 $SU(n-2)_2/U(1)^{n-3}$ であることを初めて明らかにした。

また、 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の場合、強結合領域では、磁荷をもつモノポールや電荷と磁荷をもつダイオンが凝縮する閉じ込め真空や、それらが相互作用する非自明な共形場理論 (Argyres-Douglas 理論) が現れ、その探求は場の理論の重要な問題である。こうした理論は M5 プレーンのリーマン面上へのコンパクト化とリーマン面上の Hitchin 方程式系で特徴づけられる。Gaiotto-Moore-Neitzke によりその解のモジュライ空間と BPS スペクトルは、TBA 方程式により調べられた。さらに Gaiotto はこの TBA 方程式の massless 極限を考えると、その方程式が、オメガ背景場の Nekrasov-Shatashvili 極限の背景場上 $N = 2$ 超対称ゲージ理論で定義された Hitchin 系と関係した Oper と呼ばれる常微分方程式の Stokes 問題と関係していることを指摘した。

以上の例でわかるように、強結合超対称ゲージ理論を調べる新しい研究方法として、可積分模型の手法、特に Hitchin 系に付随する線形微分方程式系の解の接続問題と量子可積分模型の対応が新しい解析的手法として着目を集めている。一方で可積分模型の分野において、Dorey-Tateo は、ある種の高階常微分方程式 (ODE) の解が Stokes 係数が非線形積分方程式を満たすことを示し、ODE のエネルギースペクトルと零質量極限の量子可積分系 (IM) の Bethe 仮説方程式の解が対応していることを見いだした。この対応は ODE/IM 対応と呼ばれており、量子可積分系と微分方程式の間の非自明な関係を表している。また Lukyanov-Zamolodchikov は、Sinh-Gordon 方程式の解と有質量量子可積分系である量子 sine-Gordon 模型の T-Q 関係式との対応を指摘した。この非自明なこの古典可積分方程式と量子可積分系の関係は、理論物理の様々な分野に現れており、ある種の普遍的な原理“古典量子可積分対応”と認識されつつある。

2 . 研究の目的

本研究の目的は、超対称ゲージ理論の背後にある古典可積分構造、特に Hitchin 方程式系に着目し、ODE/IM 対応あるいは量子可積分対応により強結合ゲージ理論のダイナミクスを明らかにすることである。特に強結合におけるグルーオン散乱振幅 (Wilson ループ) や相互作用する高次元共形場理論の BPS スペクトルの構造を明らかにする。量子可積分系の手法により物理量をあらゆる結合領域で解析的、または数値的に評価することができ、超対称ゲージ理論の重要なダイナミクスである双対性を検証し、強結合領域における物理の理解の進展が期待される。超対称ゲージ理論の強結合領域におけるダイナミクスは、ゲージ理論のみならず強結合における超弦理論の性質の研究のためにも重要である。超対称ゲージ理論では非摂動効果が重要であり、その厳密な解析により、超対称ゲージ理論の双対性を検証し、その強結合領域の物理を解明できると考えられる。本研究では、超対称ゲージ理論の非摂動効果を研究するための新しい手法として、ODE/IM(常微分方程式-可積分模型)対応およびその一般化である 2 次元の古典可積分模型と量子可積分模型の対応 (古典量子可積分対応) を用い、超対称ゲージ理論のあらゆる結合定数領域における Wilson ループの期待値や BPS スペクトルを解析し、そのダイナミクスを研究する。強結合領域における超対称ゲージ理論や超弦理論では非摂動効果が重要な役割を果たす。非摂動効果の厳密な解析による超対称ゲージ理論の双対性を検証することによりその強結合領域の物理が解明できると考えられる。

3 . 研究の方法

本研究では Hitchin 系を与える典型的な理論として affine Lie 代数に基づく戸田場の理論 (affine Toda 場理論) に着目する。affine Toda 場理論は、2 次元の可積分な場の理論として基本的なものであり、 $A_1^{(1)}$ 型 affine Lie 代数に対して、その方程式は sine-Gordon 方程式を与えることが知られている。affine Toda 場方程式は有質量の運動方程式であり、それを共形変換して得られる affine Toda 場方程式を変形された affine Toda 場方程式という。変形 affine Toda 場方程式は Lie 代数に値をもつゲージ場とスカラー場、さらにスペクトラルパラメータを導入してゲージ場とスカラー場に対するゼロ曲率条件となる Hitchin 方程式系と呼ばれる形に書き表すことができる。その Hitchin 系に対する複素平面 (あるいはリーマン面) 上で定義される線形問題の解は、ある角領域 (Stokes セクター) において無限遠で漸近的に発散する解 (dominant 解) と収束する解 (subdominant 解) に分かれる。複素平面はこの Stokes セクターで分割され、隣接する Stokes セクター間における subdominant 解の接続係数を Stokes 係数と呼ぶ。 $A_1^{(1)}$ 型の Hitchin 系に対し、共形変換を行うとこの線形問題は Schroedinger 型の常微分方程式となる。その解の接続問題を調べると、Stokes 係数は非自明な関数関係式をみたすことがわかる。それは統計力学における 6 頂点模型の T-Q 関係式や量子 Wronskian 関係式 となることが知られている。

本研究ではまず、任意の affine Lie 代数に付随した変形 affine Toda 方程式とそれに対応する Hitchin 方程式の線形問題を考察し、その量子可積分模型との関係を確立する。まず変形 affine Toda 方程式の漸近解から決まる、massless 極限を考え、その Stokes 問題を考える。その方程式の解の漸近形とその接続公式 (Stokes 現象) を WKB 法により調べる。その解の Wronski 行列式のみたす関数関係式から、Bethe 方程式を求め、それがどのような量子可積分模型と対応するかを調べる。古典型 affine Lie 代数 に対応する affine Toda 理論の場合は、伊藤-Locke により Dorey-Dunning-Masoero-Suzuki-Tateo の 高階 ODE になることはすでに知られている。その場合に対応する量子可積分模型の Bethe 方程式も分かっている。一方で、例外型の Lie 代数や、その

Langlands 双対が異なる affine Lie 代数 に対応する変形 affine Toda 方程式に対応する可積分模型はまだ同定されていない。この残りの例外型 affine Lie 代数に対応する massless ODE/IM 対応をまず確立する。さらに一般の場合となる massive 理論の場合には、Bethe 方程式の構成は上記の特別な場合を除き確立していないので、あらゆる affine Lie 代数について massive ODE/IM 対応を確立する。また ODE/IM 対応をグルーオン散乱振幅や Nekrasov-Shatashvili 極限におけるゲージ理論の BPS スペクトルに応用する。

4 . 研究成果

常微分方程式と量子可積分模型の非自明な対応(ODE/IM 対応)および、その応用である N=4 超対称ゲージ理論における BPS 状態やゲージ重力対応について研究を行い、以下の結果を得た。

(1) まず untwisted affine Lie 代数の Langlands 双対に基づいた変形 affine Toda 方程式に付随する可積分線形微分方程式の解の接続問題を調べ、接続係数の関数関係式から untwisted affine Lie 代数に基づく量子可積分模型の Bethe 仮説方程式を導いた。これにより例外型 Lie 代数も含む ODE/IM 対応の一般的な定式化が初めて与えられた。(Christopher Locke との共同研究)

(2) 超対称ゲージ理論の真空の幾何学的な構造を理解するために、理論をオメガ背景場の Nekrasov-Shatashvili (NS)極限において定式化し、その BPS スペクトルのみならず可積分構造を調べた。特に最も対称性の高い N=4 超対称 Yang-Mills 理論のオメガ変形を導入し、その NS 極限における BPS 方程式を導出することに成功した。(金山祐介, 佐々木伸, 中島宏明 との共同研究)

(3) Homogeneous Sine-Gordon(HSG)模型は、SU(n)型のパラフェルミオン共形場理論の多重スケールパラメータによる共形摂動で与えられる。この理論は N=4 超対称ゲージ理論の強結合におけるグルーオン散乱振幅を ODE/IM 対応を用いて理解するために重要な理論である。今年度の研究において、SU(3)型の共形場理論の 2 個の摂動パラメータと HSG 模型の 2 個の質量スペクトルの関係が厳密に決定できた。これは Zamolodchikov により一変数の場合が解かれて以来の 20 年来の難問であり、今回初めて新しい進展をもたらした。(Janos Balog, Zoltan Bajnok, Gabor Toth, 佐藤勇二との共同研究)

(4) これまでに確立した untwisted affine Lie 代数の Langlands 双対に基づく変形された affine Toda 方程式に付随する有質量 ODE/IM 対応を拡張し、 B_2 型 untwisted affine Lie 代数の場合の有質量 ODE/IM 対応について研究した。ODE の解の Wronskian から得られる Baxter の T-Q 関係式、T-system, Y-system の構造について詳しく調べた、その結果対応する可積分模型が A_3/Z_2 型であることを確認した。これは untwisted affine Lie 代数以外の場合の ODE/IM 対応が、Langlands 双対性を成立することを示唆しており、意義のある結果である。また常微分方程式(ODE)の解のモノドロミーが T-system に非自明な境界条件を生じさせることが明らかになった。これは将来的に超対称ゲージ理論の構造因子の強結合極限を調べる上で重要な役割を果たすことが期待される。(Hongfei Shu との共同研究)

(5) オメガ背景場中の N=2 超対称ゲージ理論の Nekrasov-Shatashvili 極限の低エネルギー有効理論は、平坦な時空中の低エネルギー有効理論を記述する Seiberg-Witten 曲線を量子化することでその BPS 質量のスペクトルが記述できることが知られている。本研究ではまず SU(2)ゲージ理論における量子化された Seiberg-Witten 曲線に基づいて、強結合領域におけるモジュライ空間の特異点近傍にお

ける BPS 質量の高次量子補正を WKB 近似により具体的に計算することに成功した。(大久保隆史,菅野正一との共同研究) その後, Omega 背景場の Nekrasov-Shatashvili 極限における SU(2)型の N=2 超対称量子色力学の強結合領域に現れる N=2 超共形場理論(Argyres-Douglas 理論)の量子周期を具体的な計算を始めて行った。(大久保隆史との共同研究)

(6) Argyres-Douglas 理論の Nekrasov-Shatashvili 極限について考察し, その量子 Seiberg-Witten 曲線が ODE/IM 対応に現れる典型的な ODE であることを見出した。特に A_{2N} 型 Argyres-Douglas 理論について, ODE/IM 対応により対応する量子可積分系を調べた。その結果, 対応する量子可積分模型が 2 次元共形場理論の非ユニタリー系列の極小模型であることがわかった。これは Argyres-Douglas 理論において見出されている 2d/4d 対応と呼ばれる, 4 次元共形場理論と 2 次元共形場理論の対応を量子可積分模型の立場から説明するまったく新しい視点を提示している。(Hongfei Shu との共同研究)

(7)常微分方程式のスペクトル問題と零質量量子可積分模型の関数関係式の間の対応(ODE/IM 対応)は, これまでの我々の研究により, affine リー代数に付随する Toda 場方程式に付随する線形問題方程式の光円錐極限と, affine リー代数の Langlands 双対に付随する Bethe 仮説方程式の対応に拡張された。しかし一般の有質量可積分模型と古典可積分方程式との関係はこれまで詳しく調べられていなかった。例外として Lukyanov-Zamolodchikov による A_1 型リー代数の場合の sinh-Gordon 模型方程式と量子 Sinh-Gordon 模型の結果がある。今回の研究ではこれを A_r 型のリー代数に拡張することに成功した。 A_r 型の affine Toda 方程式の線形問題方程式の解の解析接続問題を考え, 解の接続係数が量子可積分模型の Q 関数であることを見出した。さらに Q 関数のみならず Bethe 仮説方程式およびそれに付随する非線形積分方程式を導出し, それが量子 Toda 理論に付随する非線形積分方程式と同一視されることを確認した。さらに非線形積分方程式から UV 極限に対応する共形場理論の有効中心荷を計算し, それが non-unitary な A_r 型 W 代数の中心荷と一致することを見出した。その結果は, 有質量 ODE/IM 対応の零質量極限で記述される ODE に対応する量子 Seiberg-Witten 曲線から 2d/4d 対応によって対応が予想されている 2 次元共形場理論の中心荷と一致し, Ito-Shu により予想された ODE/IM 対応による 2d/4d 対応の関係と一致することが確認された。(Hongfei Shu との共同研究)

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 11 件)

1. [Katsushi Ito](#), Marcos Marino and Hongfei Shu , TBA equations and resurgent Quantum Mechanics Journal of High Energy Physics 1901 (2019) 228, 1-44 査読有
2. [Katsushi Ito](#) and Hongfei Shu, Massive ODE/IM Correspondence and Non-linear Integral Equations for $A^{(1)}_r$ -type modified Affine Toda Field Equations, Journal of Physics, A: Math. Theor. 51 (2018) no. 38, 385401, 1-19 査読有
3. [Katsushi Ito](#), Yuji Satoh and Junji Suzuki, MHV amplitudes at strong coupling and linearized TBA equations, Journal of High-Energy Physics 08 (2018) 002, 1-37 査読有
4. [Katsushi Ito](#) and Takafumi Okubo, Quantum periods for N=2 SU(2) SQCD around the superconformal point, Nuclear Physics B934 (2018) 356-379 査読有
5. [Katsushi Ito](#) and Hongfei Shu, ODE/IM correspondence and the Argyres-Douglas theory, Journal of High Energy Physics 1708 (2017) 071, 1-21 査読有

6. [Katsushi Ito](#), Shoichi Kanno and Takafumi Okubo, Quantum Periods and prepotential in N=2 SU(2) SQCD, Journal of High Energy Physics, 1708 (2017) 065,1-31 査読有
7. [Katsushi Ito](#) and Hongfei Shu, ODE/IM correspondence for modified $B_2^{(1)}$ affine Toda field equation Nuclear Physics B916 (2017) 414-429 査読有
8. Zoltan Bajnok, Janos Balog, [Katsushi Ito](#), Yuji Satoh, Gabor Zsolt Toth, On the mass-coupling relation of multi-scale quantum integrable models, Journal of High Energy Physics 1606 (2016) 071, 1-52 査読有
9. Zoltan Bajnok, Janos Balog, [Katsushi Ito](#), Yuji Satoh, Gabor Zsolt Toth, Exact mass-coupling relation of the simplest multi-scale quantum integrable model, Physical Review Letters 116, 181601 (2016) 査読有
10. [K.Ito](#), Y.Kanayama, H. Nakajima and S. Sasaki, BPS Equations in Omega-deformed N=4 Super Yang-Mills Theory, Journal of High Energy Physics 1511 (2015) 152, 1-24 査読有
11. [K.Ito](#) and C.Locke, ODE/IM correspondence and Bethe ansatz for affine Toda field equations, Nuclear Physics B896 (2015) 763-778 査読有

[学会発表](計 10 件)

1. [Katsushi Ito](#), Marcos Marino and Hongfei Shu, 2019年3月14日 日本物理学会第74回年次大会 一般講演, TBA equations and resurgent quantum mechanics
2. [Katsushi Ito](#), 2018年12月14日 one-day workshop for QFT and string theory, Osaka City University, Osaka 招待講演, TBA equations and resurgent quantum mechanics
3. [Katsushi Ito](#), 2018年3月13日 Rikkyo MathPhys 2018, March 12-14,2018, Rikkyo University, Tokyo 招待講演, ODE/IM correspondence and Argyres-Douglas Theory
4. [Katsushi Ito](#), 2017年10月25日 ITP, CAS, Beijing 招待講演, Quantum Seiberg-Witten periods at strong coupling
5. [Katsushi Ito](#), 2017年8月31日 workshop and school "Topological Field Theories, String Theory and Matrix Models", 2017 August 25-31, Moscow 招待講演, Quantum SW periods at strong coupling
6. [Katsushi Ito](#), 2017年7月5日, University of Tokyo, Komaba 招待講演, On the mass-coupling relation of multi-scale quantum integrable models
7. [Katsushi Ito](#), 2016年12月9日 Wigner Research centre for physics, Budapest, Hungary 招待講演, ODE/IM correspondence and the Argyres-Douglas theory
8. [Katsushi Ito](#), 2016年11月29日 5th String Theory meeting in the Greater Tokyo Area at Waseda Univeristy and Tokyo Metropolitan Univeristy 招待講演, ODE/IM correspondence and Bethe ansatz for affine Toda field equations
9. [Katsushi Ito](#), 2016年11月13日 9th Taiwan string workshop, National Tsinghua University, Hsinchu, Taiwan, 招待講演, ODE/IM correspondence and its application to supersymmetric gauge theories
10. [Katsushi Ito](#), 2015年8月27日 Workshop and School "Quantum Geometry, Duality and Matrix Models", Moscow 招待講演, ODE/IM correspondence, spectral duality and the Argyres-Douglas theory

6. 研究組織

(1)研究分担者

(2)研究協力者

研究協力者氏名：佐藤 勇二, 鈴木 淳史, 束 紅非, Christopher Locke, 大久保 隆史

ローマ字氏名：Yuji Satoh, Junji Suzuki, Hongfei Shu, Christopher Locke, Takafumi Okubo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。