様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：２４４０２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ０５０５９

研究課題名（和文）予期せぬ対称性とそのベキ根極限から探るゲージ理論と弦理論の可積分構造

研究課題名（英文）An unexpected symmetry in the integrable structure of gauge and string theories and its root of unity limit

研究代表者

大田　武志（Oota, Takeshi）

大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員

研究者番号：７０４１９６８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：「2次元/5次元対応」は、ある種の2次元場の理論と、超対称性をもつ5次元ゲージ理論との間の対応である。2次元場の理論の相関関数と5次元ゲージ理論の分配関数が、同じものである、というのがその主張である。われわれは、2次元理論の相関関数の自由場表示を与える演算子を決定し、演算子の位置をすこしずらせば、2次元/5次元対応が成り立つようにできることを示した。
「楕円代数」は、構造定数が楕円関数で表される、量子対称性である。この楕円代数が、2次元/5次元対応において、重要な役割を果たしていることをわれわれは議論した。

研究成果の概要（英文）：The 2d/5d connection is a correspondence between certain two-dimensional field theories and five-dimensional gauge theories with supersymmetry. It implies that the correlation function of the two-dimensional theory and the partition function of the five-dimensional theory are the same. We have determined operators which give a free-field representation of the correlation function and showed that 2d/5d connection holds if the positions of the operators are slightly shifted.
The ``elliptic algebra’’ is a quantum symmetry whose structure constants are expressed in terms of the elliptic functions. We argued that this elliptic algebra plays important roles in the 2d/5d connection.

研究分野：数理物理

キーワード：自由場表示　変形された量子対称性　ベキ根極限

１．研究開始当初の背景

2 次元共形場理論と、4 次元超対称ゲージ理論との間には、関連があると古くから考えられてきた。2009 年に Alday-Gaiotto-Tachikawa の仕事により、両者のあいだにはより精密な対応関係があることが明らかになった。彼らは 2 次元共形場理論の相関関数と、4 次元ゲージ理論の分配関数が、パラメーターの読み替えによって同一視できることを指摘したのである。

この「2 次元/4 次元」対応は、その後様々な形で一般化が行われた。その一つが、「2 次元/5 次元」対応への拡張である。2 次元理論側で、共形不変性の「量子変形」(q-変形)を考える。ゲージ理論側では、コンパクトな余分な 1 次元方向を考え、5 次元時空上のゲージ理論への「q-もちあげ」を行う。すると、これらの理論の間にも対応関係がなりたつ。また、別の拡張として、2 次元パラフェルミオン共形場理論と、ALE 空間と呼ばれる日自明な 4 次元時空上の超対称ゲージ理論の間の対応関係が明らかにされた。

２．研究の目的

われわれは、研究開始時点において、q-変形共形対称性を持つ 2 次元場の理論において、変形パラメーターをうまく 1 のベキ根にする極限をとることによって、パラフェルミオン場が自然に現れてくることを示していた。これらの理論は、非自明な背景時空(ALE 空間)上の 4 次元超対称ゲージ理論と対応している。

この対応関係の理解を深めるため、これらの対応の背後にあるであろう「予期せぬ対称性」を探る。 それが、ある種の「量子群対称性」であると予想して、その「ベキ根極限」などの解析を行う。

３．研究の方法

(1) 2 次元共形場理論やその量子変形理論の相関関数は、ある種の「行列模型」と解釈することができる。そうすると、行列模型に対して開発されてきた様々な解析手法がこの場合にも用いることができる。行列模型を媒介として、「2 次元/4 次元対応」あるいは「2 次元/5 次元対応」を解析する。とくに、研究代表者らによって導入された「セルバーグ型行列模型」およびその計算手法を用いる。

(2) 「q-変形共形対称性は、その自由場表示において、単純な 1 のベキ根極限ではなく、パラメーターと変数の分岐をうまく調節してベキ根極限をとると、パラフェルミオン場を得ることができる」という知見をわれわれは見出していた。この知見に基づき、非自明なベキ根極限をとることによって、2 次元理論と 4 次元ゲージ理論の非自明な対応関係を考察する。

(3) ある種の「量子群対称性」は、q-変形共形対称性と密接な関わりを持っていることが知られている。この「量子群」にも注目して、ベキ根極限を多角的に考察する。

４．研究成果

(1) 2 次元共形場理論は、ビラソロ対称性ともよばれる共形対称性をもつ理論である。ビラソロ対称性を量子変形したものが、q-変形ビラソロ対称性である。

q-変形ビラソロ代数は、複雑な代数であるが、「自由場表示」を用いることにより、容易に取り扱うことができる。

q-変形ビラソロ対称性を持つ 2 次元場の理論の相関関数もまた、「頂点演算子」と「遮蔽演算子」を用いることにより、自由場表示できる。これは、変形されていない 2 次元共形場理論のいわゆるクーロンガス表示の q-変形版である。

q-変形ビラソロ代数の遮蔽演算子は、q-変形ビラソロ代数の生成子と交換するという条件により、定数倍を除いて完全に決定することができる。

既約表現に対応する「頂点演算子」は、q-変形ビラソロ代数の生成子と「よい」代数関係にあるという条件から決定されるが、この場合には、定数倍以外にも不定性が残ってしまうことが知られていた。

そこで、われわれは、「2 次元/5 次元対応」を手掛かりにして、q-変形ビラソロ代数の頂点作用素を決定した。頂点作用素の不定性を、「2 次元/5 次元対応」が成り立つという条件で固定したといえる。

これによって、q-変形理論の相関関数の自由場表示 (「積分表示」) を得ることができた。これまで、相関関数の q-変形については、変形する前のクーロンガス表示からの「こうなるであろう」という推測はあったが、頂点作用素を決定したことにより、より系統的に「積分表示」を導くことが可能になった。

そして、とくに 4 点相関関数と、5 次元超対称ゲージ理論の分配関数を比較してみると、次のような事実が判明した。「実際に「2 次元/5 次元対応」が成り立つためには、頂点作用素の位置を微調整する必要がある。」この微調整の物理的意味はいまのところ不明である。

ともあれ、q-頂点作用素が求まったことにより、より精密な「2 次元/5 次元対応」を考えられるようになったということは、重要な成果である。

(2) q-変形共形場理論の頂点作用素の不定性は、q-ビラソロ代数が、「余代数」構造を持たないことに起因する。余代数構造は、代数構造の「双対」にあたるものである。とくに、代数の「積」の双対である「余積」を q-ビラソロ代数はもたない。

そこで、余積をもつ「量子群」に注目する。とくに「楕円量子群」（楕円量子代数）のレベル 1 の表現空間には、q-ビラソロ代数が作用することが知られている。この楕円量子代

数が q-ビラソロ代数の背後に隠れているとすると、「2 次元/5 次元対応」を通じて、5 次元超対称ゲージ理論側でも何らかの役割を持つと期待される。
　そこで、楕円量子代数が 5 次元ゲージ理論のダイナミカルな対称性であるという予想のもとに、一番簡単な sl(2)代数に基づく場合のレベル１表現とそのベキ根極限を解析した。
　具体的には、まず、sl(2)楕円量子代数のレベル１表現を自由ボソン場を用いて構成した。これは、sl(2)カレント代数の自由場表示（いわゆる Frenkel-Kac 構成）の楕円代数版である。そして、楕円代数に含まれる２つの変形パラメーターをうまく１のベキ根に近づけることによって、パラフェルミオン場と自由ボソン場が現れることを明らかにした。
　これらの場を用いて、パラ・ビラソロ対称性をもつ 2 次元の共形場理論を構成できる。そして、5 次元ゲージ理論は、ベキ根極限によって、4 次元 ALE 空間上の超対称ゲージ理論になる。
　われわれの研究の帰結として、パラ・ビラソロ共形場理論と、4 次元 ALE 空間上の超対称 SU(2)ゲージ理論の対応が、2 次元/5 次元対応から自然に導けることが示されたといえる。

(3) 研究を開始した段階では想定していなかったが、行列模型の研究を行っているうちに、その一種であるチャーン・サイモンズ行列模型についての成果が得られたので、それを報告する。
　ゲージ理論の非摂動効果を考察するうえで、弦理論や M 理論を用いると有効な場合がある。M 理論は、弦理論を統合すると期待されている理論で、その構成要素として、M2-ブレーンとよばれる「膜」を含む。
　M2-ブレーンは空間 2 次元、時間 1 次元方向に広がる物体で、超対称チャーン・サイモンズ理論を用いた記述ができると考えられている。この理論は、3 次元超対称ゲージ理論の一種である。
　物質場を含む超対称チャーン・サイモンズ理論の分配関数は、超対称性のおかげで、有限次元の積分に帰着する。この積分は「チャーン・サイモンズ・物質」行列模型とよばれており、2 次元共形場理論の相関関数の「双曲」変形とみなすことができる。
　物質場の数を n として、n=2 の場合は、ABJM 行列模型、n=-2 の場合はレンズ空間行列模型とそれぞれ呼ばれており、精力的に研究されている。（行列模型において、n はパラメーターで、負の値に解析接続できる。）
　行列模型において重要な役割を果たす量に、レゾルベントとよばれるものがある。物質の数 n が一般の場合には、レゾルベントの性質は完全には理解されていない。そこでわれわれは、レゾルベントの従う、シュヴィンガー・ダイソン方程式を解析した。チャーン・サイモンズ・物質行列模型は 2 行列模型の一種で、2 個のレゾルベントを持つ。
　シュヴィンガー・ダイソン方程式は、平面極限で、ループ方程式と呼ばれる方程式になる。
　これらのレゾルベントの従うループ方程式は、レゾルベントの基底をうまく選べば、2 組の 3 次代数方程式となることをわれわれは明らかにした。
　ただし、n=±2 の場合には、片方の 3 次方程式が縮退して 2 次方程式となる。すなわち、ループ方程式の立場から、ABJM 行列模型やレンズ空間行列模型は、他の場合と質的に異なる、特殊な場合に対応することを示すことができた。
　この研究によって、2 次元可積分系と超対称ゲージ理論の対応についての理解が少し掘り下げられたと思われる。この研究においては、平面極限の場合を考察したが、そうでない場合のレゾルベントの解析は、さらなる知見をもたらしてくれると期待される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　９　件）
① Itoyama H.、Oota T.、Yoshioka R.、Elliptic algebra, Frenkel-Kac construction and root of unity limit、Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical、査読有、Vol.50、No.36、2017、365401、
DOI: 10.1088/1751-8121/aa8233

② Itoyama H.、Oota T.、Suyama T.、Yoshioka R.、Cubic constraints for the resolvents of the ABJM marix model and its cousins、International Journal of Modern Physics A、査読有、Vol.32、No.11、2017、1750056、
DOI: 10.1142/S0217751X17500567

③ Itoyama H.、Oota T.、Yoshioka R.、q-Vertex Operator from 5D Nekrasov Function 、 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical、査読有、Vol. 49、No. 34、345201、2016、345201、
DOI: 10.1088/1751-8113/49/34/345201

〔学会発表〕（計　１５　件）
① Oota T.、Elliptic algebra at root of unity limit 、 Workshop and School “Topological Field Theories, String theory and Matrix Models”、Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute)，モスクワ、2017

② Itoyama H.、q-Virasoro/W block at root of unity, parafermions and 2d-4d connection、seminar at physics department of 北京大学、2016

③ Yoshioka R.、The integral representation of solutions of KZ equation and its modification by K operator insertion、``Quantum Geometry, Duality and Matrix Models" conference、Kharkevich Institute, モスクワ、2016

〔図書〕（計 1 件）
① 糸山 浩司、京都大学出版会、波動と場の物理学入門、2017、196

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
大田 武志（OOTA, Takeshi）
大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員
研究者番号：７０４１９６８８

(2)研究分担者
糸山 浩（ITOYAMA, Hiroshi）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： ３０２４３１５８

吉岡 礼治（YOSHIOKA, Reiji）
大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員
研究者番号：９０５１４５５５

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：

(4)研究協力者
（ ）