

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 14 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K11993

研究課題名(和文) 応用確率過程解析における「ホインの微分方程式の方法」の開拓

研究課題名(英文) Development of Method of Heun's Differential Equation in Applied Stochastic Processes

研究代表者

金野 秀敏 (KONNO, Hidetoshi)

筑波大学・システム情報系(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：20134207

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：古典的な応用確率解析では、マスター方程式やフォッカー・プランク方程式などで記述されるマルコフ・モデルが「ガウスの超幾何微分方程式」を解く問題に帰着できるマルコフ・モデルに限られていた。本研究では「ホインの微分方程式の方法」を開拓し、(1) フラクショナル・マスター方程式で線形の生成・死滅率を持つ場合の解析法；(2) フラクショナル・フォッカー・プランク方程式で回帰項に3次までの非線形項、拡散項に2次までの非線形項が含まれる場合の解析法；(3) フラクショナル・ポアソン過程の重ね合わせを使って新しい(ホインのクラスを超える)確率過程を構成する方法；等を示し、付随した具体的応用例も示した。

研究成果の概要(英文)：In the classical applied probability theory and analysis, mathematical analysis can be possible only when Markov stochastic models can be reduced to problems of solving Gauss's hyper-geometric differential equation (GHGDE). In the present study, we developed 'a method of Heun's differential equation (HDE)' to treat a class of non-Markov, non-Gaussian stochastic models which are related to solving problems beyond the class of GHGDE. The main theoretical methods covers for (1) solving a class of fractional master equation; (2) solving a class of fractional Fokker-Planck equation with third order nonlinear in the regression term and second order in the diffusion term; (3) generating superstatistical fractional Poisson process, a class of stochastic process beyond HDE. Applied examples in the real world are shown with their developed methods.

研究分野：確率論的リスク解析

 キーワード：応用確率過程解析 ホインの微分方程式 非平衡系の生成・死滅過程 非線形確率過程 長期記憶効果
位相特異点ダイナミクス 複雑系のダイナミクス

1. 研究開始当初の背景

確率過程解析の歴史は古く、古典的な確率過程の名著(フェラー、ガードナー、ゴエルとダイン、リスケン、等)が多数存在する。記憶がないマルコフ過程による実在現象の記述が行われてきたが、解析的な取り扱いが可能であるモデルの多くは、正規分布を持ち、マルコフ過程でかつ、マスター方程式やフォッカー・プランク方程式が「ガウスの超幾何微分方程式」を解く問題に帰着できる場合であった。しかし、非正規(冪則)分布を持ち、かつ、長期記憶効果を有する確率過程は、現実世界では枚挙にいとまがない。しかし、このような確率過程の解析は数値シミュレーションに頼らざるを得ない現実があり、通常、結果の妥当性の検証や精度の高い結果を得るには膨大なコストを要する。

2. 研究の目的

実在の実験や観測からの時系列データや複雑な偏微分方程式の数値モデルの数値シミュレーションから得られる時系列データなどを眺めると、非正規分布と記憶効果を持つ場合が頻りに観察される。しかし、既往の現象論的な記憶のない確率モデルでは分布確率密度の非正規性を再現するように特徴変数(例えば、位相特異点数)の現象論的確率モデルが構成できる場合もあるが、特異点数と記憶効果を担う寿命分布を同時に再現できない等の問題があった。本研究は「複雑な現実のシステムの動態」を表現する確率過程を「ホイン(Heun)のクラス」の微分方程式を用いて解析する理論的枠組みの開拓」を具体的な現実的な事象の応用確率過程解析を通じて実行する目的とした。

3. 研究の方法

本研究では、まず、長期記憶効果をフラクショナル(非整数階)微分を用いて導入したフラクショナル・マスター方程式の解析を考えた。粒子(事象)数が n であるとし、 n 依存性のある生成率及び死滅率: ($\lambda_n = \lambda_{n+}$, $\mu_n = \mu_{n+}$)を持つ非常に複雑な確率過程モデルである。このモデルの確率母関数の解析解をホイン関数を用いて得ることができた。また、生成率及び死滅率: ($\lambda_n = \lambda_n$, $\mu_n = \mu_n$)が少し簡単な場合の確率母関数の厳密解を合流型ホインの微分方程式の解を用いて得た。

また、この非整数階微分で長期記憶効果を導入したフラクショナル・フォッカー・プランク方程式を考え、回帰項 $K(x)=k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$, 拡散項 $D(x)=d_0 + d_1 x + d_2 x^2$ の場合での「ホインの微分方程式を用いた解析法」の開拓を行った。新しく開拓した方法の成果の詳細は次の 4 章に示す。4.1 章にはフラクショナル・マスター方程式の方法、4.2 章にはフラクショナル・フォッカー・プランク方程式の方法、4.3 章にはフラク

ショナル・ポアソン過程の重ね合わせの方法、4.4 章には空間不均一系の実効情報量を用いた情報圧縮の方法を述べる。4.5 章にはまとめと課題を論ずる。

4. 研究成果

4.1 フラクショナル・マスター方程式(FME)の方法 [1,2,5,6,8,12,13,14]

マスター方程式をフラクショナル微分で記憶項を導入する試みは ザイチェフとザスラフスキー (1997), ラスキン(2003), マイナデーとゴレンフロ(1997)らの碩学によって精力的に推進された。しかし、彼らの取扱ったマスター方程式のクラスは確率母関数が「ガウスの超幾何の微分方程式」に帰着可能なものに限定されていた。マスター方程式のクラスで確率母関数がホインの微分方程式を解く問題に帰着する場合は取り扱われていなかった。

本研究ではフラクショナル微分を使って記憶効果を導入し、生成・死滅率が(i)単純生成・死滅過程 ($\lambda_n = \lambda_n$, $\mu_n = \mu_n$)[1,2]; (ii) 生成過程にさらに粒子数 n 依存性が加わった生成・死滅過程 ($\lambda_n = \lambda_{n+}$, $\mu_n = \mu_n$)[1,5]; (iii) 生成/死滅過程に粒子数 n 依存性が加わった生成・死滅過程 ($\lambda_n = \lambda_{n+}$, $\mu_n = \mu_{n+}$)[4,8]; の3つの場合についてフラクショナル・マスター方程式(1)の確率母関数の時間依存解の厳密解やその積分表示を得た。(i),(ii)では時間依存解 $P(n, t)$, 絶滅確率 $P(0, t)$, 寿命分布, モーメントの解析表現の厳密解が得られた。[1,2,5,6,8] (iii)ではモーメントの解析表現の厳密解もえられた。しかし、確率母関数の $z=0$ に存在する特異点の存在のために時間依存解 $P(n, t)$, 絶滅確率 $P(0, t)$, 寿命分布 $f(t)$ などは得られないことが判明した。そこで、ポアソン変換を行い、フォッカー・プランク近似を行った上で、時間依存解, 絶滅確率, 寿命分布の近似的解析表現を得ることに成功した。この理論的拡張により (i) 光学ルーージュ波(Optical Rouge Wave)の振幅分布と寿命分布の実験結果を説明可能である[6]。また、(ii) あるクラスの感染症の空間拡散効果の評価、量子色力学の実験解析で初期値が固定できない場合の初期値分布依存性の解明、3次元スクロール波の遷移領域の振る舞いを定性的な説明可能であること等も示した[11,12,14]。(iii) ポアソン変換を用いてフォッカー・プランク近似解を得ることにより特異点の存在により解を得ることができなかったパラメータ領域での寿命分布やパラメータ推定の方法も提案した[11,12,14]。これらの解析法は、非整数階微分で記憶が導入できる場合でも使えるのが味噌である。

4.2 フラクショナル・フォッカー・プランク

方程式(FFPE)の方法 [1,3,4,7,9,11]

既往研究では、記憶のない線形確率過程(非整数解微分の指標 $\mu=1$, $K(x) = k_1 x + k_0$, $D(x) = d_2 x^2 + d_1 x + d_0$)のピアソン系の拡散過程の解析が行われてきた。本研究では(3)のように非線形の回帰項がある場合に拡張されたフラクショナル・フォッカー・プランク方程式(FFPE)を考えた。FFPEの解は離散固有値だけの場合次のようにミッタゲ・レフラー関数と呼ばれる指数関数を拡張した関数の級数の形で表現できることがわかった。

この場合展開係数に様々なホイン関数が現れる、固有関数 $_{n}(x)$ はホイン関数 $S(x)$ (HeunG (ホイン関数); HeunC (合流型ホイン関数); HeunB (双合流型ホイン関数); HeunD (2重合流型ホイン関数); HeunT (3重合流型ホイン関数); の各関数は Maple®で定義される)を使って次のように表現される：
 $_{n}(x) = P_{s}(x) S(x) = _{n}$, $P_{s}(x)$ は平衡解である。特殊な係数の場合の結果を表1に示す。この方法の開発により、(a)一酸化炭素のプラチナ単結晶中での酸化反応及び、(b)空間2次元のアリエフ・パンフィロフモデルの心室細動を模擬する状態での位相特異点分布(PDF)とそのパワースペクトル(PSD)の様相の両方を定性的に説明出来ることを示した。2つの特性を同時に説明出来るモデルは提案されていない。

離散固有値だけでなく、連続固有値も関係している系では、解の標識にさらに連続固有値の寄与も加わるが、この場合にもミッタゲ・レフラー関数が出現する。

表1: 固有関数としてのホイン関数と固有値 Λ_n の典型例

No.	Heun 関数	固有値 Λ_n	回帰項 $K(x)$	拡散項 $D(x)$
(A)	HeunD	$n(\alpha - n)$	$\gamma + (\alpha + 1)x - \beta x^2$	x^2
(B)	HeunB	αn	$\gamma + \alpha x - \beta x^2$	x
(C)	HeunT	αn	$\gamma + \alpha x - \beta x^2$	1
(D)	HeunC	$n(\alpha - n)$	$-(\alpha - 1)x - \beta x^3$	$x^2 + 1$
(E)	HeunB	$n(\alpha - n)$	$(\alpha + 1)x + \beta x^2 - \delta x^3$	x^2

これらの研究の成果は熊本の研究会 (2018年3月)で報告した。また、「Fractional Generalized Inverse Gaussian Process for Population Dynamics of Phase-Singularities」と題する論文は J. Phys. Soc. Jpn, (2018)に投稿し、査読者と交信中である。さらに、表1に示した、「より複雑な非線形項を含むピアソン系」の解析方法や応用に関する論文は準備中であり順次公表する予定である。

4.3 フラクショナル・ポアソン過程の重ね合わせ

の方法 [10, 13]

ベックとコーヘン(2003)はオルンスタインとウーレンベック過程の重ね合わせを用いて様々な非正規過程を構成する方法を考案した。現実のシステムは時間的にも空間的にも不均一となっているために、同一パラメータの分布(均一な逆温度)を持つ状態が実現されない。「逆温度に分布を持たせ、ベイズの定理を適用すれば、現実の非正規分布を持つ様々な過程が解析できる」という哲学に基づいている。これにより実データの多くが解析できる。すなわち、逆温度がガンマ分布、対数正規分布、逆ガウス分布などを採用すれば実データの分布をよく説明出来るので広く用いられるようになっている。しかし、事象の発生機構がポアソン過程のような離散確率過程になっている場合は、むしろ、これを基礎として理論の拡張を計ったほうが好ましい場合もある。そこで、本研究で、ポアソン過程の重ね合わせで確率過程を構成する方法を考えた。ポアソン分布の重ね合わせで別種の非正規分布を構成する試みは数多いが、時間変動を取り入れた取り扱いや、記憶効果を考慮した取り扱いは報告されていない。そこで、まず、時間変動を取り入れた取り扱いを行ったところ、計数過程の時間変化が非整数冪特性を持たないことに気付いた。フラクショナル・ポアソン過程(生成率 $_{n} =$, 死滅率 $\mu_{n} = 0$ とした確率過程)で記憶を導入し、重ね合わせを実行しなければ時間変動の非整数冪増加が出て来ない。この方法により神経パルスの非整数冪時間変動と待ち時間分布の両方を説明できるモデルを構成できる[10]。この新しい方法は「ホインの微分方程式の方法」では扱いきれない確率過程のモデルの拡張も可能となった[10]。

4.4 空間不均一系の実効情報量を用いた情報圧縮 [4,9]

空間2次元の心筋モデルである局所結合アリエフ・パンフィロフ・モデルとは異なり、大局結合と局所結合の両方が内在する2次元アリエフ・パンフィロフ・モデルでは、パラメータ変化に伴い振動状態に「キメラ状態」と呼ばれる「空間不均一な乱れた素励起」のような構造が現れることが知られている。数値計算が精力的に行われているが、その生成機構や確率過程モデルによる解析なども十分に行われていない。脳波解析の分野で使われている「実効情報量 (Pragmatic Information, PI)」を用いた定量化法をこの空間2次元系のシミュレーションに適用してそのPIの確率過程を解析し、ハイパー・ガンマ過程で良く特徴を捉えることができることを明らかにした[4,9]。この複雑系では位相特異点のダイナミクスが従来の位相特異点のメカニズムとは異質であり、理論的にはホインの微分方程式で解析できる範

困を逸脱しているが、実効情報量を用いた情報圧縮と粗視化によって、ホインのクラスの微分方程式で解析可能な領域に引き戻している事を意味する。

4.5 まとめと課題

本プロジェクトでは1変量のフラクショナルマスター方程式、及びフラクショナル・フッカープランク方程式がホインの微分方程式のクラスに入る場合の解析方法の開拓を行った。一般にはフラクショナルマスター方程式の生成・死滅率は $\lambda_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots$, $\mu_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots$ のように粒子数 n 依存性が入るが、これに対応する母関数の従う微分方程式はホインのクラスを逸脱する。同様に、FFPEでも $K(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$ で k_0 が0でない場合、対応する固有値方程式はホインのクラスを逸脱する。高次の非線形項や多変量の相互作用を繰り込んで、生成・死滅率が負値 (<0) となる場合には、多変量の確率過程の解析の枠組みを使って解析しないと発散を回避できない。また、複雑系では位相特異点数やその寿命だけでなく、(A)位相特異点の速度分布、(B)位相特異点の異常拡散、(C)位相特異点ペアー相関関数、(D)位相特異点列からなるフィラメントの曲率分布、(E)位相特異点の張力分布、等を総合した解析が現象発現の本質や因果関係の解明に必要である。これらの問題の解決は今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14 件)

【1】金野秀敏，3次元スクロール波のフィラメント特異点の生成死滅過程の数理，動的生体情報の現状と展望，1巻，(2016)，pp. 28-37【査読無】。

【2】金野秀敏，合流型ホインの微分方程式の確率過程解析への応用，「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」統計数理研究所共同研究リポート，359巻(2016) pp. 18-27【査読無】。

【3】角屋貴則，内山祐介，金野秀敏，心拍揺らぎの確率分岐と心疾患症のリスク因子 - 逆温度ゆらぎの形状因子と緩和特性の検証 -，「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」，統計数理研究所共同研究リポート，359巻(2016) pp. 28-35【査読無】。

【4】桑原淳，宮田猛，金野秀敏，空間2次元大局結合の回転らせん波乱流状態の特性評価，「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」，統計数理研究所共同研究

リポート，359巻(2016) pp. 36-45【査読無】。

【5】金野秀敏，位相特異点の生成死滅過程と非平衡相転移 -ホインの微分方程式の応用-，数理解析研究所講究録 Vol. 189(2016) pp. 28-37【査読無】。

【6】Hidetoshi Konno，Birth-Death Stochastic Process of Optical Rogue Wave Described by Fractional Master Equation - Application of Confluent Heun Differential Equation -，J. Phys. Soc. Jpn. Vol.86, 064001 (2017) pp.1-10; <https://doi.org/10.7566/JPSJ.86.064001>【査読有】。

【7】金野秀敏，複雑系を記述する3種のベータ過程について，国土館大学紀要 情報科学 38巻(2017) pp.28-36【査読無】。

【8】金野秀敏，合流型ホインの微分方程式で記述される確率母関数の積分表示とアクセサリパラメータ，数理解析研究所講究録 Vol. 2034 巻(2017) pp. 199-208; ISSN 1880-2818【査読無】。

【9】J. Kuwahara, H. Miyata and H. Konno，Stochastic process of pragmatic information for 2D spiral wave turbulence in globally and locally coupled Alief-Panfilov oscillators, AIP Conference Proceedings, 1872, 020013 (2017) pp.1-6; <https://doi.org/10.1063/1.4996670>【査読有】。

【10】Hidetoshi Konno and Yoshiyasu Tamura, Stochastic modeling for neural spiking events based on fractional superstatistical Poisson process, AIP Advances 8, 015118 (2018) pp. 1-16; <https://doi.org/10.1063/1.5012547>【査読有】。

【11】Hidetoshi Konno and Yoshiyasu Tamura, Approximate time-dependent solution of a master equation with full linear birth-death rates, Journal of Physics Communication, Vol. 2, 025033 (2018) pp.1-13;<https://doi.org/10.1088/2399-6528/aaae13>【査読有】。

【12】金野秀敏，田村義保，3次元スクロール波の特異点ダイナミクスの複雑さとフィラメントの生成死滅過程，統計数理研究所共同研究リポート，Vol. 408，(2018) pp. 71-81【査読無】。

【13】金野秀敏，長期記憶のある生成死滅過程解析におけるアフィン変換、直交多項式と逆問題，統計数理研究所共同研究リポート，410巻，(2018) pp. 30-38【査読無】。

【14】 Hidetoshi Konno and Imre Paszlit, Fractional Linear Birth-Death Stochastic Process - An application of Heun's differential equation, Reports on Mathematical Physics, Vol. 81 (2018) 印刷中 (20 pages) 【査読有】.

〔学会発表〕(計 15 件)

(1) 角屋貴則, 内山祐介, 金野秀敏, 心拍揺らぎの確率分岐と心疾患のリスク因子 - 逆温度ゆらぎの形状因子と緩和特性の検証 -, 「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」(2015年12月11-12日, 立川, 東京)

(2) 桑原淳, 宮田猛, 金野秀敏, 空間2次元大局結合の回転らせん波乱流状態の特性評価, 「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」(2015年12月11-12日, 立川, 東京)

(3) H. Konno, Non-Markovian Model for Describing Birth-Death Stochastic Process of Phase Singularities in a State of Heart Failure, International Conference on Complex Dynamical Systems and Applications, (2015年2月15-17日, Durgapur, India)

(4) J. Kuwahara, H. Miyata and H. Konno, Stochastic Process of Pragmatic Information for 2D Spiral Wave Turbulence in Globally and Locally Coupled Aliev-Panfilov Oscillators, International Conference on MMCTSE 2017, (2016年2月17-19日 Oxford, UK)

(5) 金野秀敏, 3次元スクロール波のフィラメントと特異点の生成死滅過程の数理-長期記憶, 臨界揺らぎ, 寿命分布-, 統計数理研究所共同研究集会「動的生体情報論の現状と展望1」(2015年9月10-11日, 立川, 東京)

(6) 金野秀敏, 位相特異点の生成死滅過程と相転移 -ホインの微分方程式の応用-, 研究集会「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」, 京都大学数理解析研究所(2015年10月14-16日, 京都)

(7) 金野秀敏, 合流型ホインの微分方程式の確率過程解析への応用, 統計数理研究所共同研究集会「非侵襲生体信号の解析・モデル化技術とその周辺(3)」, 統計数理研究所(2015年12月11-12日, 立川, 東京)

(8) 金野秀敏, 位相特異点の生成死滅過程解析における合流型ホインの微分方程式の方法, 統計数理研究所共同研究集会「動的生

情報論の現状と展望」(2016年9月15-16日, 立川, 東京)

(9) 金野秀敏, 複雑系の確率過程を用いた統計的記述と逆問題, 統計数理研究所共同研究集会「複雑系の逆問題とその周辺(1)」, 統計数理研究所(2016年12月9-10日, 立川, 東京)

(10) 金野秀敏, 合流型ホインの微分方程式で記述される確率母関数の積分表示とアクセサリパラメータ, 研究集会「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」, 京都大学数理解析研究所(2016年10月12-14日, 京都)

(11) 金野秀敏, 非平衡系の揺動現象の数理解析に現れるホインの微分方程式, アクセサリパラメータ研究会, 熊本大学理学部(2017年3月15-17日, 熊本)

(12) 金野秀敏, 田村義保, 3次元スクロール波の特異点ダイナミクスの複雑さとフィラメントの生成死滅過程, 統計数理研究所共同研究集会「生体信号・イメージングデータ解析に基づくダイナミカルバイオインフォマティクスの展開」(2017年10月26-27日, 立川, 東京)

(13) 金野秀敏, 長期記憶のある生成死滅過程解析におけるアフィン変換, 直交多項式と逆問題, 統計数理研究所共同研究集会「複雑系の逆問題とその周辺(2)」, 統計数理研究所(2017年12月21-22日, 立川, 東京)

(14) 金野秀敏, 田村義保, 3次元スクロール波フィラメントの負張力状態の数理モデル, 研究集会「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」, 京都大学数理解析研究所(2017年10月11-13日, 京都)

(15) 金野秀敏, 3次までの非線形項と長期記憶を有する一般化ピアソン系拡散過程のホインの微分方程式を用いた解析, アクセサリパラメータ研究会, 熊本大学理学部(2018年3月14-16日, 熊本)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金野秀敏 (KONNO, Hidetoshi)
筑波大学・システム情報系(名誉教授)・名誉教授
研究者番号: 20134207

(2) 研究協力者

田村義保 (TAMURA, Yoshiyasu)
パジット・イムレ (PASZIT, Imre)