様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年 　６ 月 １８ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１２３９２

研究課題名（和文）線形代数における諸概念の認知科学的分析に基づく教授モデルの開発

研究課題名（英文）Development of teaching method for linear algebra based on cognitive science

研究代表者
川添　充（Kawazoe, Mitsuru）

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号：１０２９５７３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：従来研究では直観的な理解が十分にあるとされていた幾何ベクトルについて，ベクトル3本で生成される空間のイメージが困難な学習者が多くおり，それらの学習者は空間内に4本のベクトルがある場合の一次従属性の認識に問題が生じやすいとの結果を得た。ベクトル3本で生成される空間をイメージする際の認知過程がレイコフとヌーニェスによる「無限の基本メタファー」で捉えられるとの仮説を立て，幾何的な捉え方を支援する指導による改善を試みた。幾何的な理解が一次独立性についての深い理解に関わることを示唆する結果を得たが，幾何的な捉え方を支援する指導の効果は確認できなかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は，従来研究が3次元空間までの概念は直観的に理解可能と暗黙のうちに前提していたことについて，３次元空間での幾何ベクトルに関しても直観的理解には限界があることを明らかにした。本研究の成果は，３次元までの直観的理解を前提とした指導がこれまで十分な効果を上げられなかったことの要因の説明を可能にする。この意味で，本研究の成果は，今後の線形代数の教育研究の基礎となりうるものである。

研究成果の概要（英文）：In the previous research, it has been believed that students have sufficient intuitive understanding on geometric vectors. However, our study revealed that there are many learners who have difficulty in imagining the space generated by three vectors, and that those learners have difficulty in recognizing that four spatial vectors are linearly dependent. Based on the result of the qualitative analysis, we hypothesized that the cognitive process in imagining a space generated by three vectors can be captured by "Basic Metaphor of Infinity" introduced by Lakoff and Nunez, and tried to improve students' understanding by helping students' geometric way of thinking. We obtained results suggesting that geometrical understanding is related to deep understanding of linearly independence, but we could not confirm the effect of the instruction which is aimed to help students' geometric way of thinking.

研究分野：数学教育

キーワード：数学教育　認知科学　線形代数

１．研究開始当初の背景

高等数学を対象とする数学教育研究において，線形代数は「認知的にも概念的にも学習困難な科目」（Dorier & Sierpinska, 2001）とされ，現在に至るまでこの状況は本質的に改善されておらず早急な改善が望まれる。従来研究が本質的な改善に繋がっていない主な原因として，線形代数の概念理解における認知的側面を捉えきれていないことが挙げられる。高等数学の教授学習を捉える枠組として数学教授学や APOS 理論（Arnon 他，2014），トール（Tall, 2013）による「三世界モデル」があるが，数学教授学は教授学習の場のメカニズムの分析が目的で学習者の内面は扱わず，APOS 理論と三世界モデルは概念の理解段階を捉える認知心理学的枠組を与えるが，理解段階の移行に関与する認知的メカニズムには踏み込んでいない。

加えて，従来研究が 3 次元空間までの概念は直観的に理解可能との前提の下で行われてきたことも原因の一つとして挙げられる。APOS 理論と組み合わせ，2 次元や 3 次元の空間での身体化された概念を理解の基盤として線形代数の抽象概念の理解促進を試みた実践研究が十分な成果を上げることができなかったのは，3 次元空間までは経験的に理解できるとした前提に問題がある可能性がある。

従来研究では平面や 3 次元空間内での概念は身体化された概念として直観的に理解できるとして，そこからの拡張・一般化をどう達成するかのみが議論されてきたが，我々が過去に行った調査により, 3 次元空間での認知にも困難があることを示唆する結果が得られている（Kawazoe 他, 2014）。線形代数の概念理解の認知的メカニズムの解明のためには身体化された概念自体の解明から取り組む必要があると考えられる。

２．研究の目的

本研究では，従来研究で捉えきれていなかった，線形代数の概念理解の段階移行のメカニズムを認知科学的に捉えることを目標とし, 線形代数の諸概念について感覚-運動経験の領域から直接結び付けられている概念を明確化し，それらがどのように拡張されていくのか，そこに関わる認知的メカニズムの働きはどのようなものかを，数学的概念は身体化された概念に基礎付けられ，人間の通常の概念メカニズムによって組み立てられるとするレイコフら（Lakoff & Núñez, 2000）の見方に立って，認知科学の手法を用いることによって解明する。これにより，線形代数の学習の認知的概念的困難を乗り越える新たな教授モデルの開発をめざす。

３．研究の方法

線形代数におけるベクトル空間や次元，基底，１次独立性の概念に焦点化し，以下の方法で研究を実施した。

(1) 3 次元空間におけるベクトルの 1 次独立・1 次従属の判定問題 10 題による調査問題を作成し，大学 1 年次の線形代数のクラスで調査を実施した上で，対象者を抽出してのインタビュー調査を実施する。

(2) 調査問題による調査とインタビュー調査の結果を，APOS 理論およびレイコフ・ヌーニェスのメタファー理論を用いて分析する。

(3) 3 次元空間での概念理解と線形代数の代数的概念の理解の関係を検証するとともに，3 次元での感覚的な理解を基にした概念拡張を意図する指導法を試行して効果を検証する。

４．研究成果

研究の方法に記載した(1)～(3)に沿って研究成果を述べる。

(1) 3 次元空間におけるベクトルの 1 次独立・1 次従属の判定問題 10 題による調査問題を作成し, 3 次元空間内における部分空間や 1 次独立･1 次従属に関する空間認知についての調査を行った。調査対象は工学を専攻する大学 1 年次の学生 82 人で，線形代数の授業時間を利用して調査を行った。調査時点までに，一般のベクトル空間や部分空間，1 次独立，1 次従属の定義は学習済みであり，調査対象 82 人のうち 71 人から回答を得た。調査問題の正誤データをもとに，調査問題 10 題をそれぞれに対する 71 名の正誤パターンによるクラスタ分析を行うとともに，分析対象者 71 人についてもそれぞれの 10 題の問題に対する正誤パターンでクラスタ分析を行った。2 つの分析から，空間内に 4 本のベクトルがある場合の認識に問題が生じやすいことがわかった。空間内に 4 本のベクトルがある場合の認識を詳しく調査するため，全問正解者と空間内に 4 本のベクトルがある問題のみ不正解だった者を対象にインタビュー調査を実施した。その結果，空間内に 4 本のベクトルがある問題のみ不正解だった者の一部に，空間内での生成

される部分空間について，ベクトル２本までで生成される空間は正しくイメージできるが，ベクトル３本で生成される空間が正しくイメージできない，あるいは，正しくイメージするのに困難を伴う者がいることがわかった。さらに，同一平面上にない３本のベクトルの一次結合が空間全体を生成することをイメージすることが困難な学習者は，３ 本のベクトルがつくる図形を部分的にイメージし，そのイメージを延長させたり間を埋めたりして徐々に膨らませていって最終的に空間全体を埋め尽くすことを理解していること，また，その過程には，２ 本の作る平行四辺形とそれに３本目を加えて平行六面体になったものが次第に大きくなって全体になるようにイメージするタイプ，３ 本がつくる三角錐から矢印の方向に立体をのばしたものをイメージして次いで矢印の反対向きの立体をイメージするというふうに順番にイメージしていくタイプ，２本がつくる平面をイメージしてそこに３本目も加えたときに３本目の周りに広がっていくようにイメージするタイプの３つのタイプがあることが見出された。さらに，負の係数を含む一次結合のイメージが十分でないこと，図にベクトルが乗っている平面を描くとその平面のイメージに空間のイメージが阻害される学習者がいること，などの知見が得られた。(雑誌論文(1)，学会発表(1))

(2) インタビュー調査のデータをもとに,学生の概念理解の様子を APOS 理論を利用して分析した。APOS 理論は，抽象概念の理解度を A(Action)-P(Process)-O(Object)-S(Schema)の４段階で分類する。分析の結果，調査問題 10 題を全問正解した学生のほとんどが３本の空間ベクトルで生成される空間について Object の理解段階にある一方で,調査問題でどの３本も同一平面上にない４本のベクトルが一次独立かどうかを問う１問のみ誤答した学生のほとんどは Process の理解段階に留まっていることが見出された（雑誌論文(2)，学会発表(2)）。さらに，Process の理解段階に留まっている学生について，レイコフとヌーニェスのメタファーの理論を用いて概念理解の過程を説明することを試み，これらの学生が生成される部分空間をイメージする際の認知過程がレイコフとヌーニェスによる「無限の基本メタファー」で説明できるとの仮説を立てるに至った。

(3) (2)の成果を受けて，n 本のベクトルの一次独立性を，どれか一本のベクトルが残りの n-1 本のベクトルが生成する部分空間に入るかどうかというイメージで捉えること，生成されるベクトル空間について有限の大きさからどんどん膨らませていって最終的にどのような空間になるかを常に意識すること，次元の違いを空間の包含関係のイメージでとらえること，の三点を重視する指導方法を試した。この指導方法を検証するために，線形代数の再履修者専用クラスで実践し，指導前後にプレテストとポストテストを実施した。プレテストは(1)の調査問題 10 題のうち４本のベクトルに関する問題２題と，1・2・3 次元の幾何的イメージおよび n 次元から１次元増えるときの幾何的イメージを図で描かせる課題から構成し，ポストテストは，プレテストの４本の幾何ベクトルに関する問題２題およびこれらと本質的に同じ状況にある４本の3 次元数ベクトルの一次独立性判定問題２題に理由付きで回答する形式とした。調査の結果，以下のことが明らかになった。幾何ベクトルの問題に正しく解答できた学生は，数ベクトルの問題で幾何的解法を選択する傾向にあった。さらに，数ベクトルの問題で幾何的解法を選択する学生のほうが，計算的解法を選択する学生に比べて幾何ベクトルと数ベクトルを含めた一次独立性の問題全体の正答率が高かった。これらの結果は，数ベクトルの問題で計算的解法を選択する学習者は，幾何的問題と代数的問題とが本質的に同じ状況であってもそれを見抜けておらず，幾何的なベクトルと代数的なベクトルの２つの世界が頭の中で乖離していることを示唆しているとともに，幾何的な理解がベクトルの一次独立性についてのより高い視点からの統一的な理解を与えることを示唆している。一方で，幾何ベクトルの一次独立性を問う問題について，プレテストとポストテストとで明確な差異は認められなかった。このことは幾何的イメージを重視する指導が理解の改善に繋がっていないことを示している。また，指導前に次元や次元の増加に関する幾何的イメージ（次元が上がると空間が別の次元の方向に拡張される）を持っていたかどうかと，指導後の１次独立性の理解度との間にも明確な相関は見られなかった。このため，幾何的な理解を促進する効果的な指導方法の開発は課題として残された。

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.
Dorier, J.-L. and Sierpinska, A. (2001) Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. In D. Holton (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, pp.255-273.
Kawazoe, M., Okamoto, M. and Takahashi, T. (2014). Students' Mental Representations of Geometric Vectors and Sets Related to Linear Algebra. In P. Liljedahl et al. (Eds.), *Proceedings of 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 6, 126. Vancouver, Canada: PME. (発表資料：http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~kawazoe/slides/P ME38-SO-kawazoe.pdf
Lakoff, G. and Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From: The Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 2 件）

(1) 川添充，岡本真彦，学習者の心的表象が空間ベクトルの一次独立性の理解に及ぼす影響，日本数学教育学会誌数学教育学論究臨時増刊，査読有，98 巻，2016，pp.17-24.

(2) Kawazoe, M., Students' Conception of Spanned Space and Its Relation to Conception of Linear Independence, *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 査読有, Vol.5, p.82, 2018.

〔学会発表〕（計 2 件）

(1) 川添充，岡本真彦，学習者の心的表象が空間ベクトルの一次独立性の理解に及ぼす影響，日本数学教育学会第 49 回秋期研究大会，2016

(2) Kawazoe, M., Students' Conception of Spanned Space and Its Relation to Conception of Linear Independence, The 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME42), 2018.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）
○取得状況（計 0 件）

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：岡本　真彦

ローマ字氏名：Masahiko Okamoto

所属研究機関名：大阪府立大学

部局名：人間社会システム科学研究科

職名：教授
研究者番号（8 桁）：40254445

(2)研究協力者

なし

※科研費による研究は，研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため，研究の実施や研究成果の公表等については，国の要請等に基づくものではなく，その研究成果に関する見解や責任は，研究者個人に帰属されます。