

令和元年5月29日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K12460

研究課題名(和文) 数理計画手法に基づくロバスト最適化

研究課題名(英文) Robust optimization based on mathematical programming approaches

研究代表者

柳浦 睦憲 (Yagiura, Mutsunori)

名古屋大学・情報学研究科・教授

研究者番号：10263120

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：最適化手法のほとんどは、入力データが既知のものであるという前提のもとにアルゴリズムが設計されている。しかし、多くの現実問題において入力データには曖昧さや不確定要素が内在している。そこで、このような入力データの変動に大きく影響されないようなロバストな解を得るようなアルゴリズムの開発が望まれている。

本研究では、ロバスト性の基準として最大後悔最小化を考慮した一般化割当問題、および、ロバスト基準を考慮したナップサック問題に対して効率的なアルゴリズムを提案し、その理論的性質を解析した。また、計算実験により提案手法の性能評価を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

計画段階で別の解を選んでいけばもっとうまくいったのに、と後悔することのないようにするためには、入力データがどのように変動しても大きく損することのないような解を得る必要がある。そのような変動の組合せは無数にあるため、それらすべてに対して解の良し悪しを判断することは困難である。そのような変動の組合せのすべてを列挙することなく変動に強い解を得るために、数理的な手法を導入することでこれを可能にし、そのような仕組みを取り入れたアルゴリズムを開発した。代表的な組合せ最適化問題に対して提案手法を適用し、その有効性を示した。

研究成果の概要(英文)：Most of the optimization algorithms are designed under the assumption that we are given a fixed set of input data for the problem to be solved. However, in real-world situations, input data may contain uncertainty and/or we may not have accurate estimates of the problem parameters when the optimization decision is taken. For this reason, it is important to devise algorithms which obtain robust solutions that are not very sensitive to fluctuations in the input parameters.

We proposed heuristic and exact algorithms for the generalized assignment problem under min-max regret criterion, and those for the knapsack problem under Gamma-robust criterion, analyzing their theoretical properties. We also conducted computational experiments to evaluate their performance.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：ロバスト最適化 組合せ最適化

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19（共通）

1. 研究開始当初の背景

情報技術の進歩に伴い、大量の情報資源を有効に利用する必要性が高まってきた。この目的において重要な課題の多くが組合せ最適化問題として定式化できるが、応用上重要な問題は大規模化・複雑化してきている。しかし、NP 困難性に代表されるように、多くの組合せ最適化問題に対し、問題規模が大きい場合、厳密な最適解を得ることが極めて困難であることが知られている。

このような問題を現実的に解決する方法としてさまざまな最適化手法が提案されてきている。厳密な最適解を求める手法である分枝限定法や動的計画法、最適性の保証はないが良質の解を出来るだけ効率良く求めようとする発見的解法などである。分枝限定法に基づくアルゴリズムは近年その性能が向上しており、実用的で汎用性の高い解法として多くの数理計画ソフトウェアのエンジンとして利用されている。また、メタ戦略は、発見的解法の多様なアイデアをうまく組み合わせることによって高い性能を得ようとするパラダイムであり、その有用性は広く認知されるようになってきた。

2. 研究の目的

最適化手法のほとんどは、入力データが既知のものであるという前提のもとにアルゴリズムが設計されている。しかし、多くの現実問題において入力データには曖昧さや不確定要素が内在している。たとえば、生産計画を立てるために最適化問題を解く段階では需要が確定しておらず、需要予測に基づいて計画を行うケースは多い。このような例では、計画の実行が終了した時点では需要ははっきり定まっておらず、確定した需要に基づいた実績によって計画の善し悪しが判断される。したがって、「計画段階で別の判断をしていればもっと利益が上がったのに」と後悔することのないような計画が望まれる。このような不確定要素を深く考慮せず、たとえば予測値をそのまま入力データとして既存の最適化手法を適用して得られた解を用いたのでは、入力データの変動に大きく影響されないような解を与える機能がないため、大きな後悔を招く恐れがある。たとえば、渋滞予測に基づいて平均所要時間最短のルートを選んでも最も早く着くとは限らない。

そこで、このような入力データの変動に大きく影響されないようなロバストな解、すなわち変動の組合せによって生じ得るどんな場合に対しても後悔の度合いが小さい解を得るようなアルゴリズムの開発が望まれている。このような問題を解決するためのアルゴリズム設計の方法論の確立と、効率的なアルゴリズムの開発を研究目的とする。

3. 研究の方法

最適化問題を解くことによって後悔の度合いを評価するという枠組みを代表的な組合せ最適化問題に対して適用し、効率的な解法を設計するためのアイデアを検証していく。最適化手法としては、分枝限定法に基づく厳密解法と、発見的解法の両方を対象とする。そのいずれにおいても、数理計画的手法に基づく効率化の手立てを開発し、問題への適用を目指す。対象とする組合せ最適化問題としては、代表的な NP 困難問題の中から、ナップサック問題や一般化割当問題などのような構造が複雑でない基本的なものを用いる。そのような問題では、数理計画のさまざまな手法を利用しやすく、よいアルゴリズムを開発できる可能性が高いからである。また、スケジューリング問題やパッキング問題のようなより複雑な構造を持つ問題についても検討を行う。

4. 研究成果

目的関数に現れるパラメーターが与えられた区間の中でパラメーターごとに独立に変動する区間シナリオモデルに関する最大後悔最小化基準の一般化割当問題に対して数理的アプローチを用いた厳密解法および発見的解法を構築し、その性能を計算実験によって検証した。一般化割当問題は、 n 個の仕事と m 個のエージェントが与えられたときに、各エージェントの資源制約を違反しないという制約のもとで、各仕事をひとつのエージェントに割り当て、その際の割当コストの合計を最小化する問題である。この問題は代表的な組合せ最適化問題のひとつであり、NP 困難であることが知られている。仕事とエージェントのペアのおのおのに対して割当コストと資源要求量がパラメーターとして与えられ、また、各エージェントが持つ利用可能資源量が与えられる。これらの入力パラメーターのうち、目的関数に含まれる割当コストのおのおのが与えられた区間内で自由に変動するモデルを考察した。そのような区間の中から特定の値を選んですべてのコストの具体的な値を定めたものをシナリオという。ある割当に対して、その割当のコストはシナリオによって異なる。あるシナリオ s のもとでのある割当 x のコストと、そのシナリオ s による目的関数に対する最適解のコストとの差を後悔という。また、割当 x の後悔を最大にするようなシナリオを、割当 x に対する最悪シナリオという。最悪シナリオに対する後悔の度合いを最小にするような割当を求めることが本問題の目的である。

シナリオとして、割当コストが取りうる値の組合せを考えると、その数は無限であるが、特定の解、すなわち仕事のエージェントへの割当を指定すると、その割当に対しては、その割当の後悔を最大にする最悪シナリオのひとつがわかれば、無限の組合せに対して後悔の度合いを調べる必要がない。このような最悪シナリオを解析的に求める補題を用いることで、この問題の数理計画問題としての定式化における目的関数の入れ子構造を 1 段階減らすことができる。このようなアイデアに基づいた定式化を利用することで、提案手法の効率を実現している。

発見的解法としては、コストの変動の範囲の間からどの値を選ぶかをあらかじめ適当なルールで定め、そのシナリオに対する一般化割当問題を解くことによって解を得る、シナリオ固定法を提案し、検証した。その際、シナリオの固定方法によってアルゴリズムの性能は変わりうる。本研究では、すべての係数を区間の中央に指定する中央コストシナリオ、最小値に指定する最小コストシナリオ、および最大値に指定する最大コストシナリオの3通りを検証した。このうち、中央コストシナリオに対しては、得られる解の後悔の度合いが最適値の2倍以下に収まること、すなわち精度保証ができることを理論的に証明した。また、このアルゴリズムに対してはこの解析がタイトであることを、アルゴリズムが実際に最適値の2倍の目的関数値を持つ解を出力してしまう問題例を作成することで示した。

もうひとつの発見的解法として、もとの問題の数理計画問題としての定式化(MMR-GAP)において、部分問題を表現する式をその双対問題に置き換えることで得られる問題(D-MMR-GAP)を解いて解を得る、双対代替法を提案した。この方法に関して、D-MMR-GAPの最適値がMMR-GAPの最適値の上界を与えることや、双対代替法によって得られる解の最大後悔の度合いは、D-MMR-GAPの最適値以下であることなどを証明した。さらに、双対代替法では、最適値に対する解の精度を最適値の定数倍で抑えることができないことを証明した。なお、このように理論的には双対代替法に否定的な結果が得られたものの、この結果は特殊な問題例に対するものであり、実験結果では良好な性能を観測している。

実際、計算実験の結果、シナリオ固定法として検証した上述の3種のアルゴリズムに比べ、双対代替法の性能が高いことを確認している。表1にこれら4種のアルゴリズムの比較を示す。表中のFixed-Scenarioはシナリオ固定法3種(左から順に最小コストシナリオ、中央コストシナリオ、最大コストシナリオ)、DSは双対代替法の計算結果であり、表中の数値は最適値からの誤差(%)である。表より、双対代替法の結果が良好であることが確認できる。

表1. シナリオ固定法と双対代替法の比較

Type	Fixed-Scenario			DS
	c^-	$(c^+ + c^-)/2$	c^+	
A	13.0%	2.1%	9.3%	0.4%
B	12.5%	3.7%	7.7%	2.9%
C	12.5%	2.9%	6.3%	1.4%
E	10.2%	3.2%	6.4%	2.1%

厳密解法としては、ベンダーズ分解のアイデアに基づいて、シナリオを表現する制約を少数から始めて、その少数のシナリオからなるモデルに対する最適な割当を求め、得られた割当に対する最悪シナリオを表現する制約を制約群に追加して行く手法を提案した。このような手法において初期の制約群に制約が1つしかないときの目的関数値の範囲を解析する補題を示すとともに、その補題に基づいて、初期の制約として加えるべき制約として、中央コストシナリオを用いたシナリオ固定法によって得られた解を利用することで、初期の目的関数値を最良にできることを示している。

厳密解法として、分枝カット法に基づく手法も提案した。線形緩和問題とベンダーズカットの追加に基づく基本的な分枝カット法に加えて、ラグランジュ緩和や8種のルールを用いた変数固定法を組み合わせたより高度な分枝カット法も提案した。ラグランジュ緩和問題を解く上で、ナップサック問題を繰り返し解く必要があるが、この部分に動的計画法を用い、その計算過程をうまく活用することで緩和問題の求解の効率化を図っている。また、ベンダーズカットについては、その制約を多く入れるほど下界値はよくなるものの、下界値を得るための計算に時間がかかるため、どの程度追加するかについては工夫が必要である。この点について3種の戦略を提案し、その性能を比較検討した。その結果、追加するか否かの判断を適応的に行う手法の効果が高いことを確認した。

ベンダーズ分解に基づく厳密解法に比べ、ラグランジュ緩和を用いた分枝カット法はとくにタイプAとEと呼ばれる問題例群に対して有効であることが確認できた。また、提案手法により、タイプA、B、CおよびEの合計240問のうち102問に対して厳密な最適解を得ることに成功している。表2に計算結果を示す。表中のBendersの欄はベンダーズ分解に基づく手法の結果であり、basic B&CとLagrangian-based B&Cはそれぞれ分枝カット法とラグランジュ緩和を用いた分枝カット法による結果である。表の数値は、3種のアルゴリズムの中でその手法が最も短い計算時間で最適解を得た問題例の数を表し、括弧の中の数値は1時間以内にその手法が最適解を得た問題例の数を表す(いずれも大きいほど良い結果と言える)。

表 2. 厳密解法の計算結果

Type	Benders	basic B&C	Lagrangian-based B&C
A	0 (26)	7 (28)	22 (28)
B	15 (34)	0 (27)	20 (32)
C	21 (34)	0 (23)	13 (32)
E	3 (8)	0 (5)	9 (10)

最大後悔最小化問題など、ロバスト最適化問題を解く上で、その元の（古典的な）組合せ最適化問題を解くことが必要であり、そのような研究も並列して行う必要がある。（古典的な）一般化割当問題に関しては、以前提案したメタ戦略に基づく手法を含め、非常に多くのアルゴリズムがこれまでに提案されているため、そのサーベイを行った。また、そのようなアルゴリズムの中で特に高性能であることが報告されているものを、より大規模な問題例に対して適用する計算実験を行い、比較検討した。その結果、汎用の MIP ソルバー（混合整数計画問題 (mixed integer programming problem, MIP) を解くソルバー）の性能が近年大きく向上しており、中規模の問題例に対しては高速に良質の解を得ることを確認した。

このようなロバスト最適化への拡張の前段階として検証する古典的組合せ最適化問題に関する研究としては、航空乗務員スケジューリング問題と形状可変長方形詰め込み問題を取り上げ、検証を行った。とくに前者については、可能なペアリングを列生成法に基づいて生成する数理計画的アプローチを検証し、その性能を計算実験によって確認した。形状可変長方形詰め込み問題については、各長方形の許容される形状の中からどの形状を選んで配置するかを定めるルールや、構築型解法において次に配置する長方形を選ぶルールなど、種々のルールを検討し、高い充填率を実現している。これらのロバスト最適化版に関する検討は今後の課題である。

最悪シナリオに対する目的関数値や後悔の度合いをロバスト性の基準にする場合、すべてのパラメーターが独立にその値を決められる区間シナリオモデルでは、現実には起こりにくい極端なシナリオが最悪シナリオとして選ばれる可能性がある。しかし、そのような極端なシナリオによる大きな損失を避けるために、解が保守的になりすぎる可能性がある。そこで、平均的な、あるいは標準的な値の組合せからなるシナリオから乖離する度合いをパラメーターで制御し、大幅な乖離を許さないような範囲でのみシナリオを考え、その中から最悪シナリオが選ばれるモデルを考えた。

このようなモデルを検討するため、ナップサック問題を取り上げた。これは、 n 個の要素のおのに対して利得と重さが与えられ、重さの合計が重量制限を超えないという条件のもとで利得の合計を最大にするような要素の組合せを求める問題である。この問題は代表的な組合せ最適化問題のひとつであり、NP 困難であることが知られている。この問題において与えられる入力パラメーターのうち、利得が各要素に対して与えられた区間の範囲で変動するモデルを考える。ただし、全部の利得がそれぞれ自由に値を選べるわけではなく、標準的な値の組合せからの乖離の合計が所与のパラメーターの値以下であるという制約を加える。このような条件のもとで、もとの問題のある解に対する最悪シナリオを解析的に効率よく得ることができることを証明した。

この成果に基づき、最小利得最大化を基準とするロバストナップサック問題に対して、動的計画法に基づく厳密解法を開発した。また、このアルゴリズムの計算量が擬多項式時間であることを示した。このアルゴリズムの実験的解析による検証や、より効率的なアルゴリズムの構築は今後の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 1 件)

1. W. Wu, M. Iori, S. Martello and M. Yagiura, Exact and Heuristic Algorithms for the Interval Min-Max Regret Generalized Assignment Problem, *Computers and Industrial Engineering*, 査読有, Vol. 125, 2018, pp. 98–110.
DOI: 10.1016/j.cie.2018.08.007

〔学会発表〕 (計 3 件)

1. J. Zhang, W. Wu and M. Yagiura, Worst case scenario lemma for Γ -robust combinatorial optimization problems under max-min criterion, *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, 査読有, Singapore, December 10–13, 2017, pp. 55–59.
DOI: 10.1109/IEEM.2017.8289850
2. W. Wu, Y. Hu, H. Hashimoto, T. Ando, T. Shiraki and M. Yagiura, A heuristic algorithm for the crew pairing problem in airline scheduling, *Proceedings of the International Symposium on Scheduling (ISS 2015)*, 査読有, Kobe, Japan, July 4–6, 2015, pp. 121–128.

3. M. Milano, S. Imahori, M. Sasaki and M. Yagiura, The strip packing problem with soft rectangles: experimental analysis of heuristic algorithms, Proceedings of the International Symposium on Scheduling (ISS 2015), 査読有, Kobe, Japan, July 4–6, 2015, pp. 248–252.

〔図書〕 (計 1 件)

1. W. Wu, M. Yagiura and T. Ibaraki, Generalized Assignment Problem, in: T.F. Gonzalez, ed., Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics, Second Edition, Volume I: Methodologies and Traditional Applications, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018, Chapter 40, pp. 713–736.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

(2) 研究協力者

研究協力者氏名： 呉 偉

ローマ字氏名： (WU, Wei)

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。