様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４１８

研究課題名（和文）不連続Galerkin法とHdiv内積を用いたモーメント法の開発

研究課題名（英文）Development of a method of moment based on discontinuous Galerkin method and Hdiv inner products

研究代表者
西村　直志（Nishimura, Naoshi）

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：９０１２７１１８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：積分方程式を用いたMaxwell方程式の数値計算法において，従来の解法より未知関数の連続性に関する要求を緩和した不連続Galerkin法(DG法)を使用し，その精度を検討するとともに，前処理法や，Hdiv内積を用いて低周波破綻を回避できるかどうかなどを検討した．研究の結果，rooftop関数を用いたDG法の有効性を確認した．また，Hdiv内積を用いたDG法を定式化し，超低周波以外では双対基底を用いなくても従来法より精度の良い解析が可能であることを確認した．DG法の前処理法としては３重対角前処理法が有効だが，Calderonの前処理法は有効ではないとの結論となった．

研究成果の概要（英文）：We have investigated methods of moments for Maxwell's equations using the discontinuous Galerkin (DG) method, with relaxed continuity requirements for interpolation functions for unknowns. Particular attentions have been paid to issues such as the accuracy, preconditioning and prevention of the low frequency breakdown with the help of discretization using Hdiv inner products. We have concluded the effectiveness of the DG method using rooftop functions. Also, we could successfully formulate a DG method using Hdiv inner product which does not require dual bases. As for preconditioning, we have concluded that standard methods such as the tri-diagonal preconditioners work, but that the Calderon preconditioners are not effective with the proposed DG method.

研究分野：計算科学

キーワード：Maxwell 方程式　積分方程式　不連続Galerkin法　Hdiv内積

１．研究開始当初の背景

Maxwell 方程式の波動散乱問題は電磁気学の最も基本的かつ重要な問題で，種々の応用を有している．特に時間調和な大規模問題においては外部問題に有利なモーメント法がよく用いられており，有力な商用ソフトウエアもいくつか存在する．しかし，長年の研究にも関わらず Maxwell 方程式の持つ数学的な困難さは完全には克服されておらず，未だに多数の研究が行われている．

Maxwell 方程式におけるモーメント法の難しさは，Green 関数の形の特殊性に起因している．実際，Maxwell 方程式の基本解(無限領域の Green 関数)は，Helmholtz 方程式の基本解とその２回微分の和として表され，低周波では２回微分の項が支配的になる．このため，低周波問題の数値計算においては基本解の情報の一部が失われ，積分方程式は低周波問題において破綻する．一方，この基本解を核とする積分作用素の固有値はゼロに集積するものと発散するものの 2 系列があり，離散化した積分方程式の条件数は分割を細かくしたときに増大する．これは，大規模問題において反復法が収束しなくなることを意味する．これらの問題への対策はいくつか知られているが，低周波問題にはループ・スター分解，メッシュ細分割の問題には前処理等，全く別個に対応するのが普通である．この様な取扱いは非常に煩雑である上，ソフトウエア開発においても大きな障害となる．

実は，我々も細分割の問題に対応するために Calderon の式に基づく前処理法を研究してきた．Calderon 前処理は，要するに Maxwell 方程式の積分作用素の２乗が良条件であることを利用した方法である．我々の Calderon 前処理は他グループのそれとは異なり，実際に２乗を計算する事なしに同等の効果を得るものであり，計算量が少ないことが特色である．さらに，我々は最近 H_{div} 内積を用いたモーメント法を開発した(日本計算数理工学会論文賞受賞(H26))．これは，従来のモーメント法が L_2 内積を用いるのに対して，表面電流や表面磁流の存在する空間 H_{div} の内積を用いて離散化を行うもので，内積の divergence の部分の重みを周波数の二乗の逆数程度に取ることにより，低周波問題を解決できる．これらの手法の計算負荷はいずれも小さいので，両者を同時に使用することにより，低周波問題にも，メッシュの細分化にも対応できる Maxwell 方程式の散乱問題の数値計算法を開発することは現実的である．しかし，我々の Calderon 前処理に用いる従来型の双対基底は，不連続量を記述する能力が不十分なため，精度上の問題をかかえていた．この問題を解決することが上記のアイデアを実現するために不可欠である．

一方，近年有限要素法の分野では，基底関数の連続性の要求を緩和することによって高精度の解を実現する不連続 Galerkin 法(以下 DG 法と言う)の研究が進んでいる．不連続性を許容することで数値解を正解に速く近づけることは，我々の双対基底の抱えている問題を解消するための方向性と一致する．以上の考察から，DG 法と H_{div} 内積を用いたモーメント法を開発して，Calderon 前処理法の効果を調べることにより，工学的に関心のある問題において破綻しないモーメント法を開発するとの着想に至った．

２．研究の目的

本研究の目的は，DG 法を用いたモーメント法を定式化し，その特性を理解すること，Calderon 前処理を用いて細分割問題に対処できるかを調べること，H_{div} 内積を用いた離散化を行い，これが低周波問題において機能するか調べること，および，双対基底に関わる諸問題を検討することである．

従来，我々が提案してきた Calderon 前処理法においては，双対基底の使用を前提とする．Maxwell 方程式のトランスミッション問題(誘電体による散乱問題)の積分方程式においては，散乱体の表面の電流と磁流が未知数となるが(ともに境界の接ベクトル場)，従来の(関数空間 H_{div} に属する)基底関数を用いた場合，互いに(ほぼ)直交する基底，すなわち双対基底をそれぞれの未知数の離散化に用いることが数学的にも物理的にも自然である．さらに，双対基底を用いると，Calderon 前処理の原理である積分作用素の２乗が良条件であると言う性質が離散化した行列にも引き継がれるので，GMRES 法などの Krylov 部分空間反復法を用いると，線形方程式の求解に要する反復回数は著しく少なくなる．しかし，従来の基底は精度の問題をかかえている．本研究の究極の目的は，DG 法が従来法の代わりになるかを見極めることにある．このための基礎研究として，以下の内容を検討する．

まず，DG 法を用いて離散化を行う場合，そもそも双対基底に相当するものは何であるのかを検討する必要がある．そこで，従来の双対基底の類推から DG 版の双対基底が比較的容易に構成される見込みのある定式化を用いて，DG 法の特性を探ることが本研究の最初の目的である．

さらに DG 法を用いたモーメント法の研究は始まったばかりで，Calderon 前処理の検討を行った研究は見当たらない．これまで発表された DG モーメント法の論文では，線形方程式は比較的良条件であることが Peng 等によって報告されているが，DG 法といえども離散化方程式のスペクトルの性質は元の積分方程式のそれで決まるので，メッシュを細分化したときの破綻は避けられないものと

考えられる．そこで本研究では DG 法を用いたモーメント法においても Calderon 前処理は可能かどうかを検討する．

最後に，本研究では， H_{div} 内積を用いた定式化において DG 法を用いた離散化が可能かどうかを検討し，低周波問題においてこれが機能するかどうかを調べる．

３．研究の方法

本研究は胞芽的な研究であるので，数値実験で扱う問題は簡単な３次元電磁波散乱問題とし，散乱体は単一の球や立方体などに，積分方程式は標準的な定式化に限定する．原理的な研究であるので，コードは既開発の従来型基底関数を用いたものを改造して使用する．扱う問題は比較的小規模に留め，コードの高速化は簡単な並列化以外は考慮しない．

まず，電界型積分方程式において DG 法と L_2 内積を用いたモーメント法の定式化を検討し，これを実装して解の精度や計算効率を調べる．次に得られた定式化において Calderon の前処理法を検討し，その機能を数値的に検討する．最後に，H_{div} 内積を用いた定式化を用いた DG 法を検討する．従来型の基底関数を用いた研究によって H_{div} 内積を用いた定式化を用いた定式化は，低周波問題を解決できるが，テスト関数として未知関数の展開に用いる基底と直交する双対基底を使うことが必須であることが分かっている．そこで，DG 法を積分方程式に用いた場合，双対基底が必要であるか，必要であるならどのように構成すればよいかを検討する．具体的には要素上に規定した方向成分ごとに基底関数をとる方法を用いて DG 法を定式化し，これを実装して，数値実験によりその性能を検討する．

４．研究成果

(1) L_2 内積を用いた電界型積分方程式における DG 法

もっとも基本的な積分方程式である電界型積分方程式を取り上げ，DG 法を用いて完全導体による電磁波散乱問題を解くことを検討した．DG 法のために使用した離散化変分方程式は以下のようである．

$$a_\delta(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}) = \sum_{q\in\mathcal{I}} \int_{K_q} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$$

$$\begin{aligned}a_\delta(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}) = a(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}) + \delta\frac{i\omega\mu}{k^2}\sum_{q\in\mathcal{I}}\sum_{\partial K}\int_{K_q}\int_{\partial K_p}\mathrm{div_s}\boldsymbol{t}G\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}S_y\mathrm{d}S_x \\ + \frac{\alpha_{\mathrm{stab}}}{h}\sum_{p\in\mathcal{I}}\int_{\partial K_p}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{d}S_y\mathrm{d}S_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{t},\boldsymbol{j}) = -i\omega\mu\sum_{q\in\mathcal{I}}\sum_{p\in\mathcal{I}}\left(\int_{K_q}\int_{K_p}\boldsymbol{t}\cdot G\boldsymbol{j}\mathrm{d}S_y\mathrm{d}S_x - \frac{1}{k^2}\int_{K_q}\int_{K_p}\mathrm{div_s}\boldsymbol{t}G\mathrm{div_s}\boldsymbol{j}\mathrm{d}S_x\mathrm{d}S_y\right) \\ - \frac{i\omega\mu}{k^2}\sum_{q\in\mathcal{I}}\sum_{p\in\mathcal{I}}\int_{\partial K_q}\int_{K_p}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\nu}G\mathrm{div_s}\boldsymbol{j}\mathrm{d}S_y\mathrm{d}S_x\end{aligned}$$

ここに G は Helmholtz 方程式の基本解，E^{inc} は入射波，j は表面電流，t はテスト関数，K_q は要素，h はメッシュサイズのパラメータ，k は波数， α_{stab} は安定化パラメータであり，基底関数の法線方向の連続性を満足させるためのペナルティー項である．また δ は係数であり，-1，0，1 のいずれかの値をとる． δ=-1 の時は係数行列が対称となる．

また，本研究で使用した基底関数は rooftop 関数を基にしてこれを中央の辺で切断し，それぞれ別の自由度を与えたものである．この基底関数を選んだ理由は，双対基底の作成が比較的簡単であることである．

誘電率を１，透磁率を１，周波数を１とする．領域Ωを１辺の長さが１の立方体の外部領域とする．提案手法の精度を以下のように検証する．境界上で表面電流が入射波のそれと一致するように表面磁流を与え，DG 法と通常の Galerkin 法でこの問題を解いた解を解析解と比較した．立方体表面をそれぞれ 6, 24, 96, 384, 1536 個の四角形要素で分割した．これらのメッシュを mesh 1〜5 と呼ぶ．DG 法でのそれぞれの mesh の自由度は mesh1(24), mesh2(96), mesh3(384), mesh4(1536), mesh5(6144) である．通常の Galerkin 法を用いた場合の自由度はこの半分になる．また，case A(DG, δ=-1, α_{stab}=5), case B(DG, δ=-1, α_{stab}=0.01), case C(DG, δ=1, α_{stab}=5), case D(Galerkin)である．計算結果として誤差のノルムを表に示す．

	case A	case B	case C	case D
mesh 1	5.28601E-002	0.3253910363	5.24525E-002	0.1063047266
mesh 2	2.54353E-002	8.10328E-002	2.54146E-002	2.73218E-002
mesh 3	1.69148E-002	2.04829E-002	1.69166E-002	1.73456E-002
mesh 4	1.17866E-002	収束せず	1.17857E-002	1.18487E-002
mesh 5	8.41524E-003	収束せず	8.41435E-003	8.42321E-003

表において，α_{stab} を固定し，δ の値のみを変更した case A と case C を比較すると，δ の値は相対誤差にほとんど影響を与えないことが確認できる．次に case A と case D の計算精度はほぼ同程度であるが，非常に粗いメッシュ(mesh 1)でも A が良好な精度を示した．従って，提案した定式化は妥当であるといえる．

最後に case A と case B の比較から，解の精度が α_{stab} に依存することがわかる．これは case B において α_{stab} が小さすぎる為に双線形形式の強圧性が弱くなって精度が悪化していると考えられる．実際，case B における mesh 4 と mesh 5 は GMRES の残差がある一定回数以内に収束しなかったことを確認した．

この様に，電界型積分方程式に対して不連続な rooftop 関数を用いた数値計算例より，提案する手法は解析解をよく近似でき，また RWG を用いた Peng らの結果とも整合していることがわかった．以上のことより提案手法の

妥当性が確かめられた.

なお，残念ながら提案する DG 法は相当複雑であるため，前処理法などの研究は，より単純な問題で検討を進めてから Maxwell 方程式に適用することが賢明であることが結論された.

(2) DG 法における前処理の検討

Maxwell 方程式の DG 法が非常に複雑なものになると言う知見を踏まえて，前処理法の研究はより単純な2次元Laplace 方程式のクラック問題の超特異積分方程式を用いて行うこととした.

その結果，前処理法としては３重対角前処理が比較的有効であることが結論された．時間をかけて多くの数値計算を試みたが，Calderon 前処理の有効性は結論されなかった．Calderon 前処理が有効でない理由は，DG 法においては penalty 項が大きな値をとることであると結論された.

(3) DG 法における H_{div} 内積の使用の検討

H_{div} 内積を用いた Maxwell 方程式の解法の欠点として双対基底を使わなければならないことを上げることができる．このため，標準的には(三角形)要素を６等分して積分する必要が生ずるので，計算時間は概ね６倍になる．双対基底を使わなくてよいのであれば，計算効率が向上することが期待される．DG 法を用いた定式化では，この様なことが可能なのではないかとの着想を得たので，これを試してみた.

この定式化では離散化に三角形要素を用い，未知数の補間も，テスト関数も通常の線形要素を用いる．ただし，未知量は接ベクトル場であることを考慮し，各三角形上に固定された接ベクトルを２本とり，未知関数はこれらの接ベクトルの成分を補間するものとする．こうすると，要素ごとに６自由度を有する近似ベクトル場が生成される．これを用いると，十分多くの自由度があるので，テスト関数に表面電流と平行な成分が多く含まれ，双対基底を用いることなく H_{div} 内積による定式化の離散化を行うことができると考えられる.

使用する離散化変分方程式には(1)で述べたパラメータ α_{stab} の他に,

H_{div} norm ^{2}=L_2 norm ^{2}+c 表面発散の L_2 norm ^{2}

と書いたときのパラメータ c が含まれる．簡単のため δ=0 とした.

数値実験の結果，提案する DG 法は極めて小さい周波数以外では従来法よりも高精度の解法であることが結論されたが，超低周波数問題では精度が悪化することが分かった．また，従来法による c の推奨値 c=1/ω^2 より大きい c を用いた方が高精度である事が結論された．この原因は，提案する離散化には法線成分の連続性も含めて表面発散が０，かつ表面回転が０ の自由度が要素数ほど含まれ，超低周波問題では係数行列がこれらの分だけ rank 落ちすることにあるものと考えている．上記の問題は研究期間には完全には解決できなかったが，原因は特定できているので，現在も研究を続行している．この問題が解決した時点で論文執筆を行う予定である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０　件）

〔学会発表〕（計　２　件）
新納 和樹，電解型積分方程式における不連続ガラーキン法と Hdiv 内積を用いた離散化について，計算工学会講演会，2018

西村直志，電界型積分方程式における不連続 Galerkin 法の適用に関する基礎的研究，境界要素法合同研究発表会，2016

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０　件）

○取得状況（計　０　件）

〔その他〕
ホームページ等
該当せず

６．研究組織
(1)研究代表者
　西村直志（Naoshi Nishimura）
　京都大学　情報学研究科　教授
　研究者番号：90127118

(2)研究分担者
　新納　和樹（Kazuki Niino）
　京都大学　情報学研究科　助教
　研究者番号：10728182

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし