

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 31 年 5 月 7 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13422

研究課題名(和文)幾何的背景を持つ数論的局所系と数論幾何の未解決問題の実験的考察

研究課題名(英文)A experimental study of arithmetic local systems with geometric origins and unsolved problems in arithmetic geometry

研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI, Nobuo)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：10253048

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文): 数論幾何学においては様々な未解決問題がある一方、抽象性から具体的な例を構成することにも困難を伴う。これまでの研究で構成した2を可逆とする数論的射影直線上の高次元の一般超幾何 Calabi-Yau多様体族に対して、(1)3次元の場合に退化ファイバーが剛性Calabi-Yau多様体族を既約成分に持ち、その保型性およびコホモロジー類の代数性を証明し、(2)2進モデルを考察し至る所良い還元を持つ実2次体上のK3曲面を構成した。また、Frobenius作用のp進的性質を数論的に考察し、これまで知られていなかったアーベル多様体上の任意のF-アイソクリスタルのNewton多角形が一定になることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数論幾何学の未解決問題は極めて抽象的であり、意味のある具体的な例を構成することでさえ困難を極める。これまでの研究で構成した数論的な高次元の一般超幾何Calabi-Yau多様体族を用いて、保型性や代数的サイクルの様子を具体的に考察し、特別な場合に未解決予想を検証することができた。また、Frobenius作用のp進的性質を発見して、アーベル多様体という数論幾何学における最も基本的な対象に対して新たな現象を発見することができ、幾何学的な応用を与えた。このことにより、数論幾何学に新たな視点を提出することができた。

研究成果の概要(英文): While there are lots of unsolved problems in arithmetic geometry, it is difficult to construct explicit examples because of abstraction. Using the arithmetic family of higher dimensional Calabi-Yau varieties, which has been constructed by the author, over the projective line of invertible 2, (1) we show an irreducible component of the degenerated fiber is a rigid Calabi-Yau variety over the field of rational numbers, and prove the modularity and the algebraicity of cohomology classes, and (2) study a 2-adic model and construct a K3 surface over a real quadratic field with everywhere good reduction. We also study p-adic properties of Frobenius actions arithmetically, and prove the constancy of Newton polygons of arbitrary F-isocrystals on Abelian varieties. This result has not been known so far.

研究分野：数論幾何学

キーワード：数論的一般超幾何カラビ・ヤウ多様体族 一般超幾何関数 剛性Calabi-Yau多様体 保型性 2進モデル F-アイソクリスタル Newton多角形 代数曲線族のisotriviality

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

古典的な超幾何局所系のように、 \mathbb{Z} 上のスキーム (以下、数論的多様体) 上で Betti、de Rham、エタール、クリスタリンの各実現において具体的に構成されている局所系 (以下、数論的局所系) は、数論、代数幾何、表現論、数理物理などで様々な応用を持つ。この研究では、数論的多様体上に、幾何的な背景を持つ局所系を具体的に構成して、周期、Galois 表現の保型性、代数的サイクル、高次 Chow 群や L 関数などに関する数論幾何、代数幾何や数理物理学における未解決問題を実験的に考察することを目的としている。これまでの研究で代表者が構成した数論的一般超幾何 Calabi-Yau 多様体族が今まで知られてなかったように、高次元の数論的多様体の構成は容易でなく、興味ある例は多くは知られていない。多様体が具体的に構成されている場合には、退化などを利用して付随する局所系の性質を明らかにすることが出来る可能性がある。実験的な考察を通して、数論幾何の重要な問題への道が開けると考えている。

2. 研究の目的

この研究では、数論的多様体上に、幾何的な背景を持つ局所系を具体的に構成して、周期、Galois 表現の保型性、代数的サイクル、高次 Chow 群や L 関数などに関する数論幾何、代数幾何や数理物理学における未解決問題を実験的に考察することを目的としている。特に、これまでの研究で代表者が構成した数論的一般超幾何 Calabi-Yau 多様体族 X_n を多方面から考察し、問題の本質の理解を深める。例えば、一般ファイバーの保型性の考察 (潜在性を外す)、退化ファイバーの半安定族の既約因子の保型性、周期・中間 Jacobi 多様体の考察、 X_n の高次 Chow 群と regulator 写像の考察などにおいて、未解決問題を通してその性質を見ていく。さらに、幾何的な背景を持つ局所系の性質の考察へと発展させる。

3. 研究の方法

この研究は、数論的多様体が哲学的にどうあるべきかということと、具体的な理解との両者を求めるものであり、その研究方法も、抽象論と具体的かつ明示的な方法を行き来する。

研究代表者がこれまでに構成した射影直線から $0, 1, \infty$ を除いた直線上 T の n 次元数論的一般超幾何 Calabi-Yau 多様体族 X_n の $\lambda = 1$ における退化ファイバーと、 X_n の一般ファイバーの保型性の研究を主に行う。前者は研究代表者の都築が、後者は連携研究者の山内と都築とで行う。 λ -曲線 $T = \text{Spec} \mathbb{Z}[1/2][\lambda, 1/\lambda(1-\lambda)]$ 上の数論的多様体族 X_n は、 T 上の射影直線の n 重直積の余次元 2 の T 上滑らかな部分多様体族で反復ブローイングアップしてできる T 上の数論的多様体 P_n の 2 重被覆になっている。 P_n および X_n による相対関係が理解でき、 $n=0$ での半安定族の具体的な構成と前出の相対関係から X_n の Betti 実現等の相対コホモロジーが決定できる。この相対関係による考察は、 $n=1$ での退化ファイバーでも同様に有効な方法を与えている。実際、3 次元以下では非常にうまくいく。 $n=2, 3$ の場合から、 n が偶数のときと奇数のときでは幾何的および数論的状況が大きく異なるので、それぞれの場合に分けて考察する。 $n=1$ での半安定族の既約因子 Y_n の保型性では、Galois 表現の Frobenius 作用の跡と (Siegel) 保型形式の Fourier 係数との間の合同関係を利用する。その際、対応すべき保型形式の候補の範囲を限定するために、 X_n/T の 2 進半安定モデルを T の有限被覆上に構成し、2 進 Hodge 理論を用いて一般超幾何局所系のガロア表現を考察する。

この研究では、背景にある幾何や数論を多方面から考察し、具体性から可能になる様々な方法を駆使して、数論幾何等の様々な問題へアプローチする。27 年度の研究課題を引き続き研究するとともに、新たに X_n の高次 Chow 群や数理物理的視点からの応用の研究も開始する。課題として項目にはあげていないが、指数一般の一般超幾何関数などの幾何的背景を持つ特殊関数に伴う数論的局所系も考察する。高次 Chow 群に関しては都築が主に研究をする。 \mathbb{Q} 上の代数多様体として、超幾何 Calabi-Yau 族 X_n の Deligne コホモロジーや 1 進絶対コホモロジーを計算すると、コホモロジーが 1 次元になるところがある。これらのコホモロジーは X_n の高次 Chow 群 (または K 群) の regulator 写像による

行き先となるものである。Beilinson(-Tate) 予想を仮定すると、regulator 写像は全射となるべきで、高次 Chow 群に非自明な元が存在することになる。X_n の構成やコホモロジーの明示性を最大限活用して、高次 Chow 群を与える複体の幾何学的な解釈を与え、高次 Chow 群と regulator 写像が非自明になることを示す。最近の Taylor らによる Galois 表現の保型性の研究を適用すると、X_n の de Rham 実現における Hodge 分解の型から、T 上の一般超幾何局所系 H_{Gn} の総実体有理点ファイバーについては、山内が潜在的保型性を既に示していた。Taylor らの方法は、ある種のモジュライの有理点の存在に Moret-Bailly の定理を用いているために拡大体をコントロール出来ず在的保型性が限界である。最近の保型性の研究の進展を踏まえて、潜在性を改善するための新たな方法を考察する。

研究代表者、連携研究者や関連する研究者がそれぞれの得意分野を解説する勉強会を開催する。

28 年度までの数論幾何の幾つかの予想に関する研究課題を引き続き研究するとともに、新たに数理解物理的視点からの応用からの研究を連携研究者の山内とともに行う。超幾何 Calabi-Yau 族は $c_1 = 0$ において極大退化 (対数的) して、ポテンシャル関数や湯川結合などの数理解物理的不変量が考察できる状況になっている。Dwork が導入した標準座標を用いた Stienstra や Yu による Calabi-Yau F-クリスタルの理論を適用して、数理解物理的不変量の整数性と局所系の整構造の関連を考察する。p 進的な視点での線形微分方程式解の Taylor 係数の p 進整数性に関しては、Chiarellotto-都築の p 進対数的増大度の研究が利用できると考えている。また、p 進的な手法を利用して Calabi-Yau 多様体族の湯川結合やポテンシャル関数などを研究しているコトレヒト大学の Stienstra 教授や台湾大学の Yu 教授と互いの研究について議論して、彼らの研究から様々なアイデアを取り入れたい。研究代表者、連携研究者や関連する研究者がそれぞれの得意分野を解説し、研究の進展やこれからの進路を議論する勉強会を開催する。数論的局所系とその応用をテーマとする研究集会を最終の平成 29 年度に開催し、成果発表の場とする。その際に、関係する分野の国内外の研究者を招聘する。

4. 研究成果

指数が $1/2, \dots, 1/2; 1, \dots, 1$ の n 次超幾何関数を周期積分に持つ射影直線上の数論的 n 次元 Calabi-Yau 多様体族 X_n を構成した。この多様体族は、射影直線の $0, 1, \dots$ で退化する。26 年度までの研究で、0 での退化を利用して一般ファイバーに対する Betti, de Rham, エタール, p 進の各実現に対する相対コホモロジーを決定し、コホモロジー類が n 次超幾何局所系と代数的サイクルにより生成されるなどの成果をえていた。この研究の目的は、今までに構成した Calabi-Yau 多様体族 X_n に対して、数論における未解決問題を具体的に検証して、これらの予想の本質的な解決にむけた一歩を踏み出すことである。高次元の多様体で非自明かつ計算可能な多様体や多様体族は多くは知られていない。ここでの実験的考察は、様々な予想の理解につながる。27 年度の研究では、3 次元の場合のこの多様体族の特異ファイバーの半安定なモデルを具体的に構成して、そこに現れる有理数体上の剛性 Calabi-Yau 多様体の保型性とその上の代数的サイクルに関する結果を得た。保型性に関しては、保型多様体との代数対応を構成することで、得られた剛性 Calabi-Yau 多様体の中間次元のモチーフに対応する L 関数が重さ $4 \cdot$ レベル 16 の保型形式の L 関数になることを得た。さらに、この剛性 Calabi-Yau 多様体族上の代数的サイクルを具体的に構成して、高次 chern 類写像の全射性 (Beilinson-Tate 予想) を確かめた。また、対応する L 関数の $s=2$ で零点を持たない事実に関して、代数的サイクルに関する予想と矛盾しないことを確認した。これらの結果は、研究集会「レギュレーター in ニセコ 2015」およびパリ第 7 大学 (フランス) における整数論セミナーで発表した。

この研究では、幾何的背景を持つ数論的局所系を構成し、背景にある数論的多様体 (族) の幾何や数論を用いて、数論幾何学の様々な現象を実験的に考察する。そのため、射影直線から 3 点 $0, 1, \dots$ を除いた $Z[1/2]$ 上の曲線上の数論的一般超幾何 Calabi-Yau 族およびその中間次元のモチーフに対して、具体的な例だからこその数論幾何学の様々な予想を考察することを目的としている。特に、特異ファイバーでの半安定族の既約因子の保型性や、周期中間 Jacobi 多様体の考察を行う。28 年度研究では、(1) 数論的一般超幾何 Calabi-Yau 多様体族の 2 進還元に関する考察、および、(2) F-アイソクリスタルの Frobenius 構造から定まる Newton 多角形について考察した。(1) の研究においては、2 次元の場合の射影直線から 3 点 $0, 1, \dots$ を除いた曲線上の族としての 2 進モデルを構成した。そ

の系として、ある具体的に与えられる大数体上で至るところ良い還元を持つ $K3$ 曲面が存在することが証明出来た。(2) に関しては、完全体上の正標数完備代数多様体上の任意の F -アイソクリスタルの Newton 多角形が多様体上一定になるものを考察し、有限体上の楕円曲線がこの条件を満たすことを証明した。証明は L 関数を使う今まであまり例のない方法である。この結果を数論的一般超幾何 Calabi-Yau 多様体に適用すると、各ファイバーでの任意の F -アイソクリスタルの Newton 多角形が一定になることが証明出来る。(2) の一部分を、パドバ大学のセミナーで講演した。

昨年度の楕円曲線の場合の研究に引き続き、29 年度の研究では有限体上のアーベル多様体上の任意の F -アイソクリスタルの各点での Newton 多角形が一定になることを証明した。鍵になるのは、射影的滑らかな代数曲線上の F -アイソクリスタルの Newton 多角形がジャンプする点の個数を、Frobenius のべき数、曲線の種数と F -アイソクリスタルの階数から決まる定数で上から評価することである。その証明では L 関数の法 p 還元による合同を用いる新しい方法を導入した。さらに、その応用として、代数的基本群の変動の研究における Saidi-Tamagawa の方法を利用して、アーベル多様体上の代数曲線の族が isotrivial になること、すなわち、底空間から代数曲線の粗モジュライへの写像が定値になることを証明した。アーベル多様体上の代数曲線族の isotriviality は、複素多様体においては種数 2 以上の代数曲線の粗モジュライの双曲性に帰着されるものである。この結果の論文は現在投稿中である。また、Journé Arithmétique de Villetaneuse (パリ 13 大学) 等の研究集会やセミナー等で発表した。

F -アイソクリスタルの拡張問題について考察し、数年前に研究を開始していた局所完全交叉多様体の場合に、余次元 2 の閉部分を除く制限関手が充満忠実となることの証明を完成させ、余次元 3 以上の場合に圏同値になる具体的な例を考察した。エタール層の場合は Grothendieck により証明されていることであるが、良いコホモロジーの係数理論において働く証明を与えることができた。この結果は、研究集会「 p 進コホモロジーと数論幾何学」(2017 年 11 月・東京電機大学) にて発表した。

平成 30 年度は、一般超幾何カラビ・ヤウ多様体族の 2 進モデルと、滑らかな射影多様体上の代数曲線族に関してこれまでの研究を発展させ、以下の成果を得た。(1) 一般超幾何カラビ・ヤウ多様体族の 2 進モデルについて考察し、相対 2 次元以下の場合に完備で滑らかなモデルを構成することできた。完備滑らかなモデルを特殊化することで、ある実 2 次体上の $K3$ 曲面で至るところ良い還元を持つものを構成できた。一般の次元のアフィンモデルは、2 次元分被覆型の方程式を Artin-Schreier 型の被覆に替える変換を施すことで得られ、中間次元の局所系として一般 Kloosterman 和に付随する局所系が現れる。完備なモデルは、アフィンモデルを、2 が可逆な場合のブローアップによる構成の返還版を行って得る。相対 3 次元以上の場合には特異点が存在するので、考察すべきモデルの特異性を含めて今後の課題である。(2) F -isocrystal の各点での Frobenius の Newton 多角形が常に一定となる滑らかな射影多様体上の代数曲線族が isotrivial であることを証明する際には、Tamagawa-Saidi の変形理論の一般化が必要になる。古典的な結果である Artin らによる局所的な変形理論を応用することでそれが可能になる。これらの結果を、2018 年 6 月にチュアン・チャウ (ベトナム) にて開催されたシンポジウム「Arithmetic and geometry of local and global fields」において、「On variation of Newton polygons of F -isocrystals and its application」というタイトルにて講演して、 F -isocrystal の各点での Frobenius の Newton 多角形の変動について予想される全体像の解説を行った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

- ① Nobuo Tsuzuki : J. Inst. Math. Jussieu, 掲載決定, 査読有.
- ② Henry H. Kim, Satoshi Wakatsuki and Takuya Yamauchi : An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GS_{p_4} and its applications, J. Inst. Math. Jussieu 掲載決定, 査読有. <https://doi.org/10.1017/S147474801800004X>
- ③ Kim, Henry H.; Takuya Yamuchi : A Miyawaki type lift for $GS_{pin}(2, 10)$, Math. Zeitschrift, 288 (2017), 415-437, 査読有. <https://doi.org/10.1007/s00209-017-1895-y>

- ④ Kim, Henry H.; Yamauchi, Takuya : A uniform structure on subgroups of $GL_n(\mathbb{F}_q)$ and its application to a conditional construction of Artin representations of GL_n , J. Ramanujan Math. Soc. 32 (2017), 75-99, 査読有.
- ⑤ Bert van Geemen,;Takuya Yamuchi : On Intermediate Jacobians of Cubic Threefolds Admitting an Automorphism of Order Five, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 12 (2016), 141-164, 査読有. <http://dx.doi.org/10.4310/PAMQ.2016.v12.n1.a5>
- ⑥ Kim, Henry H.; Yamauchi, Takuya : Cusp forms on the exceptional group of type E_7 , Compos. Math. 152 (2016), 223-254, 査読有. <https://doi.org/10.1112/S0010437X15007538>
- ⑦ Sairaiji, Fumio; Yamauchi, Takuya : On the class numbers of the fields of the p^n -torsion points of certain elliptic curves over \mathbb{Q} , J. Number Theory 156 (2015), 277-289, 査読有.

[学会発表](計 22 件)

- ① Nobuo Tsuzuki : On variation of Newton polygons of F -isocrystals on a variety, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2018 (招待講演)(国際学会), 2018 年.
- ② Nobuo Tsuzuki : On variation of Newton polygons of F -isocrystals and its application, Arithmetic and geometry of local and global fields, Tuan Chau(ベトナム)(招待講演)(国際学会), 2018 年.
- ③ Nobuo Tsuzuki : Newton polygons of F -isocrystals on Abelian varieties and its applications, Seminaire de géométrie arithmétique, Univ.de Rennes (フランス)(招待講演)(国際学会), 2018 年.
- ④ 山内卓也 : The weight part of Serre conjecture for GS_{p_4}/\mathbb{Q} in terms of the classical weights, Galois representations, ramification theory, and related topics, 埼玉大学(招待講演)(国際学会), 2018 年.
- ⑤ 都築暢夫 : 有限体上のアーベル多様体の上 F -アイソクリスタル Newton 多角形の一定性とその応用, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2017 年.
- ⑥ 都築暢夫 : First rigid cohomology and full faithfulness problem in case of locally complete intersection, p 進コホモロジーと数論幾何学, 東京電機大学(招待講演), 2017 年
- ⑦ Nobuo Tsuzuki : Constancy of Newton polygons of F -isocrystals on Abelian varieties over a finite fields and its applications, Journee Arithmetique Villetaneuse, Univ. Paris 13 (フランス)(招待講演)(国際学会), 2017 年.
- ⑧ Nobuo Tsuzuki : Newton polygons of F -isocrystals on Abelian varieties and its application, Geometria Algebraica e Teoria dei Numeri, Univ. di Padova (イタリア)(招待講演), 2017 年.
- ⑨ Nobuo Tsuzuki : On constancy of Newton polygons of F -isocrystals on Abelian varieties, Fukuoka International Conference on Arithmetic Geometry 2017, (招待講演)(国際学会), 2017 年.
- ⑩ 山内卓也 : 高次代数群に対する保型形式とその周辺, 第 62 回代数学シンポジウム, 大阪大学(招待講演), 2017 年.
- ⑪ 山内卓也 : 次数 2 の正則ジエーゲル形式に関する等分布問題, 第 43 回愛媛大学代数学セミナー(招待講演), 2017 年.
- ⑫ 山内卓也 : An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for GS_{p_4} , RIMS 研究集会「保型形式とその周辺」(京都大学)(招待講演), 2017 年.
- ⑬ Nobuo Tsuzuki : F -isocrystals on elliptic curves over a finite field, Geometria algebraica e Teoria dei Numeri, Univ. di Padova (イタリア)(招待講演), 2016 年.

- ⑭ 都築暢夫 : F-isocrystal に対する Lefschetz 型の定理について, ワークショップ「 p 進コホモロジ-と数論幾何学」(東京電機大学)(招待講演), 2016 年.
- ⑮ 都築暢夫 : F -isocrystals と Lefschetz 型問題, 談話会(東北大学数学教室)(招待講演), 2016 年.
- ⑯ 山内卓也 : GS_{p_4} に関するセール予想と重さ還元定理, 日本数学会代数分科会特別講演(関西大学)(招待講演), 2016 年.
- ⑰ Takuya Yamauchi : A survey for Ikeda type constructions of holomorphic automorphic cusp forms of level one, 数論セミナー(国立台湾大学)(招待講演), 2016 年.
- ⑱ Takuya Yamauchi : Ikeda type lift for $E_{7,3}/\mathbb{Q}$, 数論セミナー(国立台湾大学)(招待講演), 2016 年.
- ⑲ Nobuo Tsuzuki : Variation of Newton polygon of F -isocrystals and p -rank of a curve, Sendai International Conference on Arithmetic Geometry in 2016(招待講演)(国際学会), 2016 年.
- ⑳ Nobuo Tsuzuki : On singular fibers of the family of arithmetic hypergeometric Calabi-Yau 3-folds, Seminaire de theorie des nombres de l'IMJ-PRG(パリ第7大学(フランス)), 2016 年.
- ㉑ 都築暢夫 : 数論的 3 次元超幾何カラビ・ヤウ多様体の族の特異ファイバーを巡って, 研究集会「レギュレーター in ニセコ 2015」(招待講演), 2015 年.
- ㉒ Takuya Yamaguchi : On singular fibers of the family of arithmetic hypergeometric Calabi-Yau 3-folds, 日韓整数論セミナー(POSTECH(浦項工科大学)、韓国)(招待講演)(国際学会), 2016 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕ホームページ等

- ① 都築暢夫, 東北大学大学院理学研究科数学専攻
<http://www.math.tohoku.ac.jp/people/tsuzuki.html>
- ② Nobuo Tsuzuki's page
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki>
- ③ 国際研究集会 Fukuoka International Conference on Arithmetic Geometry 2017
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kobayashi//fic2017-english.html>

6. 研究組織

- (1) 研究分担者 なし
- (2) 研究協力者(申請時は連携研究者)
 研究協力者氏名: 山内 卓也(東北大学大学院理学研究科)
 ローマ字氏名: Takuya Yamauchi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。