2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４２４

研究課題名（和文）捻られた非可換ルビン・テイト理論

研究課題名（英文）Twisted non-abelian Lubin-Tate theory

研究代表者
三枝　洋一（MIEDA, Yoichi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：７０５２６９６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：E/Fをp進体の高々馴分岐な2次拡大とするとき，GL(n,E)のルビン・テイト空間上に，「捻り作用素」と呼ばれる新たな自己同型を構成した．ルビン・テイト空間のエタールコホモロジーがGL(n,E)の局所ラングランズ対応を実現するという先行結果と，捻り作用素のエタールコホモロジーへの作用の分析を組み合わせることで，GL(n,E)の自己共役双対的な既約超尖点表現πに対し，そのLパラメータの偶奇性を判別する手法を与えた．

研究成果の概要（英文）：For a quadratic extension E/F of p-adic fields which is at worst tamely ramified, we constructed a new automorphism called the ``twisting operator'' on the Lubin-Tate space for GL(n,E). By combining the previously known fact that the etale cohomology of the Lubin-Tate space realizes the local Langlands correspondence for GL(n,E) and the analysis of the action of the twisting operator on the etale cohomology, we obtained a method of determining the parity of the L-parameter of a conjugate self-dual irreducible supercuspidal representation of GL(n,E).

研究分野：整数論

キーワード：局所ラングランズ対応　非可換ルビン・テイト理論　リジッド幾何

１．研究開始当初の背景
Eをp進体とする．$GL(n,E)$の局所ラングランズ対応とは，$GL(n,E)$の既約表現をEのn次元Galois 表現によってパラメータ付ける理論のことである．この対応が予想として登場したのは 20 世紀後半のことであるが, 多くの研究者の貢献の後，Harris-Taylor によって 1998 年頃に完全解決された. Harris-Taylor による証明は,

- ルビン・テイト空間と呼ばれるリジッド空間（p進解析空間）のエタールコホモロジー
- 志村多様体の数論幾何学
- Arthur-Selberg 跡公式や Arthur-Clozel の底変換定理等，保型表現論の結果

など，多数の道具立てに基づく複雑なものであり，局所ラングランズ対応がどのような対応なのかについては，証明自体からはあまり分からない.
また，局所ラングランズ対応の主張は純局所的なものであるが，証明には大域的な議論を駆使する必要があった．局所ラングランズ対応の特別な場合である局所類体論が純局所的に証明できるということもあり，局所ラングランズ対応自体の，より分かりやすい証明および理解が求められていた.

２．研究の目的
局所ラングランズ対応を純局所的に証明しようとした場合，最も大きな困難となるのは Arthur-Clozel の底変換定理であると考えられる．$E\,/\,F$をp進体の拡大とするとき，Fのn次元 Galois 表現を制限することでEのn次元 Galois 表現が得られるので，局所ラングランズ対応が成り立つとすると, $GL(n,F)$の既約表現πに$GL(n,E)$の既約表現$BC(\pi)$を対応させる方法があるということになる．これを局所ラングランズ対応を用いずに証明したのが Arthur-Clozel の底変換定理である. その証明は Arthur-Selberg 跡公式を用いる大域的なものであるが，πと$BC(\pi)$が対応するための条件は，πの指標と$BC(\pi)$の「捻られた指標」の間の指標関係式（新谷関係式）によって純局所的に特徴付けることができている．私は本研究の開始以前に，ルビン・テイト空間のエタールコホモロジーに現れる$GL(n)$の既約表現の指標を幾何学的な手法によって分析するという研究を行ってきた．その成果を「捻られた指標」にも拡張し, ルビン・テイト空間の幾何学を通して底変換定理や局所ラングランズ対応の新たな理解の手段を提供することが本研究の目的であった.

３．研究の方法
p進体の拡大$E\,/\,F$が与えられたときに, Eのルビン・テイト空間に$E\,/\,F$の Galois 群の作用による「捻り」を組み込んだ新たな幾何学的対象を導入する. Eのルビン・テイト空間は形式O_E加群の普遍変形空間であるから，そのモジュライ解釈を変更することで新たな空間を定義することができるはずである．また，パーフェクトイド空間の理論によるルビン・テイト空間の解釈や，等標数類似（局所シュトゥカのモジュライ空間）等を適宜参照することで，柔軟な視点で，新たに導入するべき幾何学的対象を探索する.
考える幾何学的対象が定まった後は，そのエタールコホモロジーをリジッド幾何学等の手段を用いて調査する．この際には，私自身のこれまでの研究経験（例えば，Lefschetz 跡公式を用いたルビン・テイト空間やラポポルト・ツィンク空間のエタールコホモロジーの分析）を有効に活用する．また，近年発展しつつある，保型表現論における捻られたエンドスコピーの理論（Arthur-Clozel の底変換定理はこの特別な場合と位置付けられる）についても積極的に調査を行い，幾何学側と見比べることで，より有益な成果が得られるように努める.

４．研究成果
(1) ルビン・テイト空間上の捻り作用素の定義

まず, $E\,/\,F$がp進体の２次拡大である場合に, $GL(n,E)$のルビン・テイト空間に対し，$E\,/\,F$の群の非自明な元による捻りにあたる「捻り作用素」という位数 2 の自己同型を定義した.
ルビン・テイト空間は１次元・高さnの形式O_E加群にレベル構造を付加したものの普遍変形空間であったが，形式群へのO_E作用およびレベル構造の Galois 共役をとることで捻り作用素の定義がなされる.

(2) 自己共役双対的な超尖点表現のLパラメータの偶奇性の判定法

ルビン・テイト空間のエタールコホモロジーH_{LT}には,

- Eの Weil 群W_E（絶対 Galois 群の変種）
- 一般線型群$GL(n,E)$
- E上の Hasse 不変量$1/n$の中心的斜体Dの乗法群$D^\times$

という 3 つの群が作用するが，これらと捻り作用素がどのような交換関係にあるかを決定した．特に非自明なのが$D^\times$の作用との交換関係であるが, これについては Dieudonne 理論を用いた具体的な計算によって目標を達成することができた.
πを$GL(n,E)$の既約超尖点表現とするとき,

- 局所ラングランズ対応（$GL(n,E)$の表現とW_Eのn次元表現の対応）
- 局所ジャッケ・ラングランズ対応（$GL(n,E)$の表現と$D^\times$の表現の対応）

という 2 種類の対応によって，W_Eのn次元既約表現$LL(\pi)$および$D^\times$の既約表現$JL(\pi)$（これは有限次元である）が定まる．H_{LT}のπ部分をとると，$LL(\pi)$と$JL(\pi)$のテンソル積が現れるということが, Harris-Taylor らによる先行研究で既に分かっていた．本研究では, πが自己共役双対的である，すなわち，πの反傾表現がπの$E\,/\,F$に関する共役と同型になるという制

約を課した状況を考察した．πが自己共役双対的であるとき，$LL(\pi)$もある意味での自己共役双対性を満たし，その偶奇性(parity)と呼ばれる不変量が自然に定まる．この偶奇性を，$JL(\pi)$に関する情報を用いて決定する手段を与えたというのが本研究の最も中心的な成果である．$LL(\pi)$を決定する問題に比べて$JL(\pi)$を決定する問題は比較的易しいので，この手段は非常に有用なものである．

$LL(\pi)$の偶奇性を決定する手段についてもう少し詳しく述べる．捻り作用素と$D^\times$の交換関係を調べる過程において，$D^\times$の位数 2 の自己同型が自然に定まり，それを用いて$D^\times$の既約表現の自己共役双対性および偶奇性を定義することができる．nが奇数の場合には$LL(\pi)$の偶奇性は$JL(\pi)$の偶奇性と一致し，nが偶数の場合には$LL(\pi)$の偶奇性は$JL(\pi)$の偶奇性の-1倍になるということが成果の具体的な内容である．証明は以下のようにして行われる．H_{LT}のπ部分に$LL(\pi)$と$JL(\pi)$のテンソル積が出てくることから，H_{LT}のπ部分に「よいペアリング」を定めれば$LL(\pi)$の偶奇性と$JL(\pi)$の偶奇性が繋がることになる．「よいペアリング」は，エタールコホモロジーのカップ積と捻り作用素を組み合わせて定義する．

(3)　自己共役双対的な単純超尖点表現のLパラメータの偶奇性の決定

(2)で導入した判定法が実用に耐えるものであることを確認するため，πが単純超尖点表現と呼ばれるクラスの表現である場合に$LL(\pi)$の偶奇性の決定を行った．単純超尖点表現は，暴分岐を持つ表現の中で最も分岐が小さく，比較的簡単な構成が知られている．しかし，特にnがpで割り切れる場合には，そのLパラメータ$LL(\pi)$は非常に複雑になる．その一方で，$JL(\pi)$はπ自身同様，比較的簡単な記述を持つので，その偶奇性を直接計算することで$LL(\pi)$の偶奇性も決定することができた．この成果は，東京大学の大井雅雄氏による，古典群の単純超尖点表現のLパラメータを決定するという研究とも関連を持っている．

(1)～(3)の成果は，「Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of $GL(n)$ and the local Jacquet-Langlands correspondence」という論文にまとめて論文誌に投稿中である．プレプリント版はプレプリントサーバ arXiv において公開中である．

(4)　さらなる一般化の試み

(1)～(3)の成果をもとにして，より進んだ研究を行うべく，様々な方面の調査を行った．最も時間を割いたのは，捻られたエンドスコピーの理論との関係についてである．πが自己共役双対的であるとき，πは拡大$E\,/\,F$に関するユニタリ群の既約表現からの底変換と呼ばれる表現論的操作で得られることが分かっている．さらに，$LL(\pi)$の偶奇性は，底変換を与えるL群の埋め込みが標準的なものであるかそうでないかを判別する不変量となっている．ユニタリ群の底変換は，「捻られたエンドスコピー持ち上げ」という，より一般的な表現論的操作の一種となっているため，ユニタリ群の底変換の場合をヒントにして，ルビン・テイト空間と捻られたエンドスコピーの関わりを発見することを目指したのである．そのためにまず，Arthur を中心とする研究者グループによる，捻られたエンドスコピーの理論に関する近年の進展について情報を収集し，本研究課題に役立てるための検討を行った．その際に得られた知見を，概説講演および概説論文という形で発表した．さらにそれに基づき，ルビン・テイト空間の変種であるラポポルト・ツィンク空間というものに対し，捻り作用素の類似を導入し，種々の群作用との交換関係を証明した．ここで導入した捻り作用素は，シンプレクティック群の表現から一般線型群の表現を構成する形の捻られたエンドスコピー持ち上げと関連していると推測される．これ以外にも，捻り作用素と局所 Gan-Gross-Prasad 予想との関係や，パーフェクトイド空間の技術を用いた捻り作用素の具体的計算等についても調査を行った．

(5)　得られた結果の位置付け，今後の展望

(2)で得られた結果は，2012 年に Prasad-Ramakrishnan によって得られた結果の類似となっている．Prasad-Ramakrishnan は，πが自己双対的であるときに，$LL(\pi)$の偶奇性（これは不変ペアリングが対称的か交代的かを判別する不変量である）と$JL(\pi)$の偶奇性が結び付くことを証明した．彼らの証明は大域的な保型表現論によるものであり，本研究の幾何学的手法とは大きく異なっている．また，本研究における$D^\times$の表現の偶奇性の定義は，捻り作用素と$D^\times$の作用の交換関係についての計算結果に基づくものであるため，純表現論的な立場からは思い付き難いものであると思われる．成果(2), (3)は，主張は純表現論的なものであるが，幾何的手法を採用することによって初めて定式化が可能になったという点において，本研究の特色を強く表すものとなっている．一方で，Prasad-Ramakrishnan の結果においては，πが超尖点表現であるという仮定よりも少し弱く，離散系列表現であるという仮定のみで十分である．このことから，成果(2)と同じ主張を，保型表現論を用いて離散系列表現に一般化することも可能であると推測される．これについては今後の課題である．

また，(1)で定義した捻り作用素を(4)でいくつかの場合に一般化したが，その一般化の使途を見つけることも今後の課題として残されている．この方向に研究を進める際の障害の一つは，ルビン・テイト空間に比べて一般のラポポルト・ツィンク空間がはるかに難しいという点にある．しかし，私自身も含めた研究者達によって，この分野は近年活発に研究さ

れてきているため，数年後に本研究成果に立ち戻ることで，新たなブレイクスルーが得られるのではないかと期待している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
① 三枝 洋一，Arthur 分類とその応用，RIMS 講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2016」に採録決定済，査読有．

〔学会発表〕（計 4 件）
① 三枝 洋一，局所 Gan-Gross-Prasad 予想について, 倉敷整数論集会 2017, 2017 年 7 月 27 日．
② 三枝 洋一，パーフェクトイド代数の概要，可換環論と数論幾何の新展開～ホモロジカル予想を通じて～，名古屋大学, 2017 年 6 月 25 日．
③ 三枝 洋一, Arthur 分類とその応用，代数的整数論とその周辺 2016，京都大学，2016 年 12 月 1 日，2 日．
④ Yoichi Mieda, Parity of the Langlands parameters of conjugate self-dual representations of GL(n) and the local Jacquet-Langlands correspondence, Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2016, National Taiwan University（台湾），2016 年 9 月 10 日．

〔その他〕
ホームページ等
三枝洋一のウェブサイト http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/index-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
三枝　洋一（MIEDA, Yoichi）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：70526962