様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 14 日現在

機関番号：13901
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：15K13425

研究課題名（和文）パンルベ方程式の解に付随した特殊多項式の組合せ論

研究課題名（英文）Combinatorics of special polynomials associated to certain solutions of Painleve equations

研究代表者
岡田　聡一（Okada, Soichi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：20224016

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：Painleve 型方程式の解に付随した特殊多項式の組合せ論的構造の解明を目指して，可積分系，対称関数のいくつかの側面を扱った．1．KP 階層の \tau 関数の展開係数を特徴づける Giambelli 型行列式を見出し，Schur 関数の新たな行列式表示を与えた．2．有理 Schur 関数に対応する Schur Q 関数の 2 通りの一般化の間の関係を明らかにした．また，C 型ルート系に付随した Schur Q 関数に対するさまざまな関係式，正値性予想を与えた．

研究成果の概要（英文）：We study several aspects of integrable systems and symmetric functions, toward unraveling combinatorial structure of special polynomials associated to certain solutions of the Painleve-type equations. 1. We find Giambelli-type determinant identities, which characterize the expansion coefficients of the \tau-function of the KP hierarchy, and give new determinant expressions for Schur functions. 2. We find a relation between two generalizations of Schur Q-functions corresponding to rational Schur functions. Also we give several identities and positivity conjectures for Schur Q-functions associated to the root system of type C.

研究分野：組合せ論，表現論

キーワード：Painleve 方程式　KP 階層　対称関数　Schur 関数　Schur Q 関数

１．研究開始当初の背景

Painleve 方程式は，新しい特殊関数の探求を動機として，19 世紀末に Painleve によって発見された 6 つの 2 階常微分方程式 PI, ... , PVI である．その後，線型常微分方程式のモノドロミー保存変形，数理物理における Ising 模型の相関関数など，他方面との関係がわかってくるとともに，Hamilton 系表示，アフィン Weyl 群の対称性（Backlund 変換），KdV 階層などのからの簡約操作など，その構造に関する研究も進展してきた．そして，現在では，q-Painleve 方程式，楕円 Painleve 方程式などの一般化も導入され，さまざまな観点からの研究が行われている．

Painleve 方程式は，パラメータの値によっては，Gauss の超幾何関数，Jacobi 多項式など古くから知られている特殊関数，直交多項式を解としてもち，さらに有理関数解，代数関数解も存在する．このような解を特殊関数と見て，表示，性質などを明らかにすることは，Painleve 方程式の起源から見ても，また，他分野への応用の点からも，重要な問題である．

梅村は Painleve 方程式 PV の有理関数解，PVI の代数関数解，Jacobi 多項式解に付随した特殊多項式（梅村多項式）を構成したが，研究代表者はこれらの多項式の係数が Young 図形の組合せ論（フック長）を用いて具体的に表されることを予想した [NOOU]．この予想の一部は種子田によって巧妙で複雑な計算を用いて証明されたが，未解決な予想も残されており，Young 図形の組合せ論が Painleve 方程式の解に現れる理由は明らかになっていない．また，増田-津田は，q-Painleve 方程式 q-PVI の代数関数解に付随した特殊多項式を，有理 Schur 関数の特殊化を用いて構成し，その係数の正値性を予想した [TM] が，研究代表者は Macdonald 対称関数の組合せ論を用いることによって，この予想の特別な場合を証明している（未発表）．このように，Painleve 方程式には，組合せ論的側面から解明すべき点が多い．

<参考文献>

[NOOU] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto, and H. Umemura, Special polynomials associated with the Painleve equations II, in ``Integrable Systems and Algebraic Geometry'', 1998, pp.349--372.

[TM] T. Masuda and T. Tsuda, q-Painleve VI equation arising from q-UC hierarchy, Comm. Math. Phys. 262 (2006), 595--609.

２．研究の目的

本研究は，Painleve 型方程式の解を特殊関数として考察するものであり，Painleve 型方程式の解の ¥tau 関数として現れる特殊多項式（梅村多項式など）のもつ組合せ論的構造を解析し，その組合せ論的構造の由来を明らかにすることを目標としている．そして，この目標に向けて，関連する対称関数の関係式，性質を明らかにすることを目的とした．

３．研究の方法

(1) 研究の全体を通して，多数の例を計算機などを用いて計算し，その中から規則性を見出すことによって，定式化を行った．

(2) この研究に関して情報収集，討論などを行うために，International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics，Seminaire Lotharingien de Combinatoire をはじめとする国内外の研究集会，セミナーに参加した．

４．研究成果

(1) KP 階層と Giambelli 公式

KP 階層の \tau 関数 \tau(x) を Schur 関数で展開したときの係数 \xi_\lambda について，\tau(0) = 1 の場合は一般の分割 \lambda に対応する係数 \xi_\lambda が hook に対応する係数の行列式（Schur 関数の Giambelli 公式にあたる）として表されることが知られていた．中屋敷 厚（津田塾大学），執行 洋子（津田塾大学）との共同研究では，一般の分割 \mu に対して s_\mu(x) を主要項とする形式的べき級数が，KP 階層の \tau 関数となることと，係数 \xi_\lambda が特別な skew shape に対応する係数の行列式で表されることが同値であることを証明した．

行列式に対する Sylvester の公式，Bazin の公式の拡張を見出し，Giambelli の公式の skew Schur 関数への一般化を得た．さらに，Schur 多項式（と有理 Schur 多項式）についても，新たな行列式による表示式を見出し，行列式に対する Sylvester の公式を用いると Giambelli の公式が直ちに導かれることを示した．また，行列式に対する新しい Cauchy-Binet 型の公式を与え，skew Schur 関数に対する Lascoux-Pragacz の公式に簡明な別証明を与えた．これらの結果は，論文
[A] S. Okada, Generalized Sylvester formulas and skew Giambelli identities, arXiv:1704.02585.
[B] S. Okada, Notes on Giambelli-type

identities, preprint.
にある.

(2) Schur の Q 関数の一般化

Schur の Q 関数の一般化の 1 つとして，有理 Schur 関数に対応するもの（有理 Q 関数と呼ぶ）があり，Hall--Littlewood 多項式の特殊化として定義されるものと，Cauchy 型公式から定義されるものの 2 通りが知られていた．この研究では，一方を他方の線型結合として具体的に表す公式を与えた．この関係式を用いることによって，Lie 超代数 q(n) の有理既約表現のテンソル積の分解を計算する方法が得られる．（論文は準備中である.）

Schur の Q 関数の別方向の一般化として，ルート系に付随したものがある．この研究では，C 型ルート系に付随して定まる Hall-Littlewood 関数において t = -1 と特殊化したもの（斜交 Q 関数と呼ぶ）を扱った.

まず，行列式に対する Cauchy-Binet の公式，石川-若山の小行列式の和公式の Pfaffian 版を見出し，Schur の Q 関数に対して成り立ついくつかの公式に見通しのよい証明を与えた．この研究成果は，論文
[C] S. Okada, Pfaffian formulas and Schur Q-function identities, arXiv:1706.01029.
にある.

次に，上の研究で得られた Pfaffian の公式を利用することによって，Schur の Q 関数に対する Nimmo の 公式，Schur の公式，Jozefiak-Pragacz の公式が斜交 Q 関数に対しても成り立つことを示した．そして，Jozefiak-Pragacz 型公式を利用することによって，King-Hamel の予想（斜交 Q 関数の組合せ論的表示式）を解決した．また，斜交 Q 関数の積に関する構造定数が非負整数となることを予想し，その特別な場合として Pieri 型公式を証明した．さらに，Schur の Q 関数の斜交 Q 関数による展開係数，斜交 Q 関数の斜交 Schur 関数による展開係数についても正値性予想を与え，その特別な場合を証明した．（これらの結果について，論文は準備中であるが, 5．主な発表論文等の〔雑誌論文〕の [1]，[2]，[5] においてその概要を公表している.）これらの正値性予想の完全な証明とその背後にある表現論の解明は今後の課題である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8　件）

[1] 岡田 聡一, Pieri rules for symplectic and factorial Q-functions, 数理解析研究所講究録「組合せ論と表現論」, 印刷中（査読無）.

[2] 岡田 聡一, Symplectic Q-functions, 数理解析研究所講究録 2039 (2017)「リー型の組合せ論」, 90-105（査読無）.

[3] A. Nakayashiki, S. Okada, and Y. Shigyo, On the expansion coefficients of the KP hierarchy, J. Integrable Syst. 2 (2017), xyx007（査読有）.
https://doi.org/10.1093/integr/xyx007

[4] J. Kim and S. Okada, A new q-Selberg integral, Schur functions, and Young books, Ramanujan J. 42 (2017), 43-57（査読有）.
https://doi.org/10.1007/s11139-015-9721-9

[5] 岡田 聡一, Schur Q-functions and symplectic Q-functions, 2016 年度表現論シンポジウム講演集, pp. 111-132（査読無）.

[6] 岡田 聡一, Young books and q-Selberg integrals, 数理解析研究所講究録 1992 (2016)「組合せ論的表現論とその周辺」, 100-113（査読無）.

[7] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, Electron. J. Combin. 23 (2016), # P4.43（査読有）.
http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v23i4p43/0

[8] 岡田 聡一, Generalized parking spaces, 2015 年表現論シンポジウム講演集, pp. 1-14（査読無）.

〔学会発表〕（計　18　件）

[1] S. Okada, Skew hook formula for d-complete posets, 80th Seminaire Lotharingien de Combinatoire（2018 年 3 月 27 日, Universite Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France）

[2] S. Okada, d-Complete posets and hook formulas, Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama（2018 年 2 月 19 日, 岡山大学, 岡山）

[3] S. Okada, Symplectic Schur Q-functions, Workshop on Enumerative Combinatorics（2017 年 10 月 19 日, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematics

and Physics, Wien, Austria)

[4] 岡田 聡一, Pieri rules for factorial and symplectic Schur Q-functions, 表現論と組合せ論（2017 年 10 月 11 日, 京都大学数理解析研究所, 京都）

[5] 岡田 聡一, C 型ルート系に付随した Schur Q 関数, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会無限可積分系特別セッション（2017 年 9 月 11 日, 山形大学, 山形）

[6] 岡田 聡一, Pieri rule for symplectic P-functions, 組合せ論サマースクール 2017（2017 年 9 月 9 日, 入船荘, 嬉野）

[7] 岡田 聡一, KP hierarchy and Giambelli identities, 可積分系の数理と応用（2017 年 9 月 4 日, 京都大学数理解析研究所, 京都）

[8] 岡田 聡一, Schur functions and Schur Q-functions, 2016 年度表現論シンポジウム（2016 年 12 月 1 日, オキナワグランメールリゾート, 沖縄）

[9] 岡田 聡一, Symplectic Q-functions, Lie 型の組合せ論（2016 年 10 月 4 日, 京都大学数理解析研究所, 京都）

[10] S. Okada, Pieri rules and oscillating tableaux, 77th Seminaire Lotharingien de Combinatoire（2016 年 9 月 12 日, Strobl, Austria）

[11] 岡田 聡一, Pieri rules and oscillating tableaux, 組合せ論サマースクール 2016（2016 年 8 月 24 日, 下呂市民会館, 下呂）

[12] S. Okada, Pfaffian identities and Q-functions, 76th Seminaire Lotharingien de Combinatoire （2016 年 4 月 4 日, Ottrott, France）

[13] S. Okada, Pfaffian identities and Schur' Q-functions, Statistical Mechanics and Combinatorics （2016 年 3 月 9 日, Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, U.S.A.）

[14] 岡田 聡一, Generalized parking spaces, 2015 年表現論シンポジウム（2015 年 11 月 17 日, 公共の宿おおとり荘, 伊豆長岡）

[15] 岡田 聡一, Young books and q-Selberg integrals, 組合せ論的表現論とその周辺（2015 年 10 月 21 日, 京都大学数理解析研究所, 京都）

[16] S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, 2015 Combinatorics Workshop （2015 年 7 月 16 日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea）

[17] S. Okada, On the existence of generalized parking spaces for complex reflection groups, 2015 Joint Meeting of AMS/EMS/SPM, Special Session on Algebraic Combinatorics and Representation Theory （2015 年 6 月 10 日, Universidade do Porto, Porto, Portugal）

[18] S. Okada, Generalized Cauchy determinant and Schur Pfaffian, and their applications, Lattice Models: Exact Methods and Combinatorics（2015 年 5 月 21 日, Galileo Galilei Institute for Theoretical Physics, Firenze, Italy）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者
岡田 聡一（Soichi OKADA）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20224016

(2)研究分担者

(3)連携研究者

(4)研究協力者