

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：14501

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13427

研究課題名（和文）接続とHiggs束のモジュライ空間とスペクトル曲線

研究課題名（英文）Moduli spaces of connections and Higgs bundles and Spectral curves

研究代表者

齋藤 政彦（Saito, Masa-Hiko）

神戸大学・数理・データサイエンスセンター・教授

研究者番号：80183044

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：稲場道明と確定特異点のスペクトル型を固定した安定放物接続のモジュライ空間を、非特異シンプレクティック代数多様体として構成し、その次元公式を各特異点の留数行列の固有値の重複度で書き表した。また対応するモノドロミー保存変形の方程式のパンルヴェ性を示した。S. Szaboと接続およびHiggs束に対する見かけの特異点理論を開発し、モジュライ空間の詳細な構造を記述する方法を開発した。光明新と共同で射影直線上の階数2、5点の確定特異点を持つ接続のモジュライ空間の詳細な記述をした。上記のモジュライ空間の詳細な記述を用いて、幾何学的ラングランズ対応をフーリエ・向井変換として実現するという研究を進めている。

研究成果の概要（英文）：We constructed moduli spaces of stable parabolic connections with regular singular points of fixed spectral type as nonsingular symplectic algebraic manifolds with M. Inaba and we also obtained the dimension formula of moduli spaces by multiplicities of eigenvalues of residue matrix at each singular point. We also showed the Painleve property of the corresponding iso-monodromic deformation equation.

With S. Szabo, we developed apparent singularity theory for singular connections and Higgs bundle and developed a method to describe the detailed structure of the moduli spaces. In collaboration with A. Komyo, we give a detailed description of the moduli space of connections of rank 2 and with 5 regular singular points on the projection line. We are studying to establish the geometric Langlands correspondence as Fourier-Mukai transformation using detailed description of this moduli space.

研究分野：数学

キーワード：放物接続 ヒッグス束 見かけの特異点 モジュライ空間 ラグランジアン束 幾何学的ラングランズ  
対応 スペクトル曲線 BNR理論

## 1. 研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式など良い性質をもった微分方程式系・可積分系の背景にある代数曲線上の確定および不確定特異点をもつ接続のモジュライ空間およびリーマン・ヒルベルト対応の理論は、稲場・岩崎・齋藤によって代数幾何学的に確立され、モノドロミー保存変形によって得られる微分方程式が幾何学的パンルヴェ性の証明が得られた。

さらに、この接続や Higgs 束のモジュライ空間の幾何学的構造は興味深く、それを記述する方法として、代数幾何学的に統一かつ内在的な方法の確立が期待されていた。また、幾何学的ラングランズ対応の観点から、接続や放物束のモジュライ空間の構造の詳しい解析も興味を持たれている。Frank Loray, Carlos Simpson, 齋藤による接続のモジュライ空間が持つ2種類のラグランジュアンファイブレーションの解析などの研究も報告されている。また、量子コホモロジーに関わる位相的漸化式の理論とスペクトル曲線の幾何学の関係も報告されていた。

## 2. 研究の目的

稲場・岩崎・齋藤らによって代数的幾何学的に構成された代数曲線上の安定放物接続や安定 Higgs 束のモジュライ空間の構造を詳細に解析する事を目的とする。そのために、モジュライ空間に見かけの特異点およびその双対座標による良い座標を導入する事により、モジュライ空間の双有理的な構造を明らかにする。また、Higgs 束のスペクトル曲線の幾何との関連を明らかにする。特に、放物接続や放物 Higgs 束にその放物ベクトル束を対応させることによるモジュライ空間間の写像がラグランジュアンファイブレーションを誘導する事、また見かけの特異点を対応させる事により得られる写像も、ラグランジュアンファイブレーションである事がわかるが、この二つのファイブレーションの構造を解析し、その横断性を一般的に証明し、幾何学的ラングランズ予想の定式化および証明への足掛かりとする。さらに、量子コホモロジーとモノドロミー保存変形の理論への応用を探る。

## 3. 研究の方法

接続や Higgs 束のモジュライ空間を代数幾何学的に構成、解析する事で、微分幾何学や可積分系の手法によるより精密な理論が構築できる。見かけの特異点理論や、スペクトル曲線の理論、不確定特異点の福原の理論等、本質的な理論を用いた精密な理論の構築を行った。日本国内、フランス、ハンガリー、台湾、米国、インドなどの研究者と連携を進め、また数理論理的なアプローチについても視野にいれながら研究を進めた。

また、幾何学的ラングランズ対応の構築の為フーリエ・向井変換の核層の構成について研究を進める。

## 4. 研究成果

平成 27 年度においては、齋藤と Szabo は、特異接続および Higgs 束に対する見かけの特異点理論を開発し、モジュライ空間の詳細な構造を記述する方法を開発した。この理論は、Higgs 束の場合に、Higgs 束とベクトル束の非零正則切断の組のモジュライ空間と、スペクトル曲線とその上の有効因子の対が同値であるという Beauville-Narashimhan-Ramanan の理論によって完全に説明できることが示された。この結果から、特異接続および Higgs 束のモジュライ空間は、代数曲線上の線職曲面のブローアップの点のヒルベルト概形と双有理である事が容易に説明でき、可積分系の変数分離の原理に幾何学的な説明をつける事が出来る。また、モジュライ空間から、ヒルベルト概形への写像は、高次アーベル屋媚写像としても理解できるが、その像を決定する事が問題となる。また、スペクトル曲線の幾何学の重要性を認識できたのも大きな進展であった。特に、スペクトル曲線族の特異点解消と不確定特異点の理論の關係に着目できた。H28 年度は、5 月に国立台湾大学で国際研究集会「Flat connections, Higgs bundles and Painleve equations」において、放物型 Higgs 束と放物型接続のモジュライ空間の幾何学とパンルヴェ方程式について2回の連続講演を行った。Ecole Polytechnique の C. Sabbah, Manheim の C. Hertling, 国立台湾大学の C-S. Lin と接続のモジュライ空間について議論した。また、韓国高等研究所 (KIAS) における「KIAS Workshop on Higgs bundles and related topics」に招聘され同様のテーマについて、3 回の連続講演を行った。また、米メリーランド大学の R. A. Wentworth, シンガポール国立大学の G. Wilkin, KIAS の J. Park とモジュライ空間の幾何学や、モジュライ空間上の  $\tau$  関数について討論した。7 月に、米国で開催された 2016 AMS von Neumann Symposium に招聘され、招待講演を行った。主催者の村瀬元彦や M. Liu らと量子曲線、位相的漸化式と接続のモジュライ空間の關係について議論した。8 月に、国立 Singapore 大学の研究集会に招聘され、招待講演を行った。12 月に神戸大学で行われた国際研究集会「Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016」でも講演を行い、C. Simpson, F. Loray, R. Donagi とモジュライ空間の幾何学、幾何学的ラングランズ対応について議論した。2017 年 3 月に、インド・ムンバイの Tata 研究所に招聘され、招待講演を行い、望月拓郎, I. Biswas と G 接続のモジュライ空間の構成について議論した。

平成 29 年は、4 月にフランスの Luminy の CIRM

で不確定特異点をもつ接続のモジュライ空間について講演した。また8月には、パリのENSの物理学研究所で接続とHiggs束のモジュライ空間の幾何学とパンルヴェ方程式について講演し、物理学者とゲージ理論との関係を議論した。また、その後、レンヌ大学のFrank Lorayを訪問し、分岐不確定特異点をもつ階数2の射影直線上の接続のモノドロミ保存変形から得られる退化ガルニエ系から、Dubrovin-Kapaevの例が得られることについて議論し、Dubrovin-Kapevの例の幾何学的な意味を考察した。H30年1月に、インド・ムンバイのTata研究所を再訪し、代数幾何セミナーで、接続とHiggs束のモジュライ空間の見かけの特異点による具体的表示について講演を行った。ハンガリーBudapestのS. Szaboを神戸大学に招聘し見かけの特異点の論文の執筆を行った。平成30年中には完成を目指したい。

代数曲線上の放物接続や放物Higgs束のモジュライ空間の代数幾何学的構造の研究では、稲場と共同で次の結果を得た。確定特異点のスペクトル型を固定したときの、安定放物接続のモジュライ空間を、非特異シンプレクティック代数多様体として構成し、その次元公式を各特異点における留数行列の固有値の重複度で書き表した。また、この場合にモノドロミー保存変形に関する微分方程式の幾何学的パンルヴェ性を示した。これらの結果は、日本数学会から2018年に出版された。

研究代表者および光明によって、射影直線上の階数2、5点の確定特異点を持つ接続のモジュライ空間の詳細な記述がなされた。これについては、投稿受理され2018年度以降に論文が出版される予定である。

このモジュライ空間の詳細な記述を用いて、幾何学的ラングランズ対応をフーリエ・向井変換として実現するという研究が進んでいる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Michi-aki Inaba, Masa-Hiko Saito, Moduli of regular singular parabolic connections with given spectral type on smooth projective curves, Journal of Math. Soc. of Japan, 査読有り, 70 No. 3, (2018) 879--894, DOI:10.2969/jmsj/76597659.
- ② Arata Komyo, Masa-Hiko Saito, Explicit description of jumping phenomena on moduli spaces of parabolic connections and Hilbert schemes of points on surfaces, accepted in Kyoto Journal of

Mathematics, arXiv:1611.00971.

[学会発表] (計 16 件)

- ① M.-H. Saito, Explicit geometric structures of moduli spaces of parabolic connections and parabolic Higgs bundles over a curve, Algebraic Geometry Seminar, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India, 2018.1.5.
- ② M.-H. Saito, Geometry of moduli spaces of connections and Higgs bundles over curves and Integrable Systems, (September 15, 2017), Geometry of moduli spaces and integrable systems, Gakushuin University, September 15 - 16, 2017.
- ③ M.-H. Saito, Moduli spaces of connections and Higgs bundles over curves and Geometric Theory of equations of Painlevé type, (August 17, 2017), Workshop "Exceptional and ubiquitous Painlevé equations for Physics", Laboratoire de Physique Théorique, École Normale Supérieure, Paris, France, August 16 - 18, 2017.
- ④ M.-H. Saito, Geometry of moduli space of parabolic connections with irregular singularities on curves, (April 11, 2017), Hodge Theory, Stokes Phenomenon and Applications, CIRM, Luminy, France, April 10 - 14, 2017.
- ⑤ M.-H. Saito, Geometry of moduli spaces of parabolic connections and Higgs bundles and their relation to Integrable Systems, (March 29, 2017), Complex Analytic Geometry, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, March 27 - 31, 2017.
- ⑥ 齋藤 政彦, 「リーマン・ヒルベルト対応の幾何学とパンルヴェ型微分方程式」, 北海道大学数学教室幾何学コロキウム, 2017年1月27日, 北海道大学数学教室.
- ⑦ M.-H. Saito, Moduli spaces of connections and Higgs bundles: Algebraic geometry and differential equations of Painlevé type, (December 7, 2016), Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016, Kobe University, December 5 - 9, 2016.
- ⑧ M.-H. Saito, An explicit geometry of moduli spaces of Higgs bundles and Singular connections on a smooth curve and differential equations of Painlevé types, (August 12, 2016), Geometry, Topology and Dynamics of Moduli Spaces, National University of Singapore, August 1 - 19, 2016.
- ⑨ M.-H. Saito, An Explicit Geometry of Moduli Spaces of Higgs Bundles and

Singular Connections on a Smooth Curve and Differential Equations of Painlevé Types , (July 7, 2016), 2016 AMS von Neumann Symposium, Hilton Charlotte University Place Hotel, NC USA, July 4 - 8, 2016.

- ⑩ M.-H. Saito, Geometry of the moduli spaces of Parabolic Higgs bundles and Connections and applications to Painleve equations. (3 lectures), (May 23-24, 2016), KIAS Workshop on Higgs bundles and related topics, KIAS Korea, May 23 - 26, 2016.
- ⑪ M.-H. Saito, An explicit geometry of moduli spaces of Higgs bundles and Singular connections on a smooth curve and differential equations of Painlevé types (2 lectures), (May 2, 2016), Flat connections, Higgs bundles and Painleve equations, National Taiwan University, Taiwan, May 1 - 5, 2016.
- ⑫ 齋藤 政彦, 接続のモジュライ空間とパインルヴェ型方程式, 日本数学会 2016 年度会 特別講演, 筑波大学 2016 年 3 月 18 日.
- ⑬ M.-H. Saito, The moduli spaces of parabolic connections and Higgs bundles over a smooth curve and differential equations of Painlevé type , (October 22, 2015), Differential and Difference Equations: Analytic, Arithmetic and Galoisian Approaches , Lille University, October 19 - 23, 2015.
- ⑭ M.-H. Saito, Application of quiver varieties to the control theory, (July 29, 2015), Kobe - Lyon Summer School in Mathematics 2015, Kobe University, July 21 - 31, 2015.
- ⑮ M.-H. Saito, Moduli spaces of connections and Higgs bundles and geometry of spectral curves (II), (May 11, 2015), TIMS-OCAMI-WASEDA International workshop on Painleve equations and related topics, National Taiwan University, May 10 - 13, 2015 .
- ⑯ M.-H. Saito, Moduli spaces of connections and Higgs bundles and geometry of spectral curves (I), (May 10, 2015), TIMS-OCAMI-WASEDA International workshop on Painleve equations and related topics, National Taiwan University, May 10 - 13, 2015 .

[図書] (計 1 件)

Development of Moduli theory, Proceedings

of The 6th MSJ-SI, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 69. Edited by Fujino, S. Kondo(Chief), A.Moriwaki, M.-H. Saito, K. Yoshioka, Mathematical Society of Japan, 2016. xiv+537pp.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 政彦 (SAITO, Masa-Hiko)

神戸大学・数理データサイエンスセンター・教授

研究者番号 : 80183044

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし