

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13428

研究課題名(和文) j -関数の新たな拡張による、虚数乗法とその実二次体版、ムーンシャイン三幅対の夢研究課題名(英文) Pursuing the dream of trinity of complex and real multiplications and the moonshine of the j -function by its novel extension

研究代表者

金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：70202017

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：以前 Zagier と調べた、ある種の微分方程式を満たすモジュラー形式を用いて二次元共形場理論の分類を見直し、それを対数項を持つ場合に一般化することにより、ある種の有理頂点作用素代数の非存在を示した。またより高階の場合の分類を通して、ある型のアフィン頂点作用素代数の分類に応用できることを示した。また、水野と共同で、虚二次体の類数を実二次数の連分数展開を用いて計算する Hirzebruch-Zagier の公式の、4で割って1余る場合の対応物を、一般の種の指標のL関数の計算により証明した。

研究成果の概要(英文)：We revisited the classification of two dimensional conformal field theory by using a modular differential equation which was formerly studied with Zagier, and by generalizing that, we showed the non-existence of a certain rational vertex operator algebra. Also, by looking at the higher order cases, we showed the theory can be applicable to a classification of vertex operator algebras. Together with Mizuno, we established a formula describing class numbers of imaginary quadratic fields in terms of continued fraction expansions of real quadratic numbers, by computing the L-function of general quadratic genus characters. This gives a counterpart in the case of primes congruent to 1 modulo 4 of the theorem of Hirzebruch-Zagier.

研究分野：数論

キーワード： j -関数 実二次体 虚数乗法 モジュラー微分方程式 モックモジュラー形式

1. 研究開始当初の背景

楕円モジュラー j -関数は複素上半平面上の解析関数で、 $SL(2, Z)$ の作用で不変なものであるが、この作用の固定点として 3 種類の特別な点がある。すなわち楕円点、放物点、双曲点である。楕円点での値をめぐる数論が古典的な虚数乗法論であり、放物点のまわりでの様子を記述する、フーリエ展開の係数と、単純群モンスターとの間に関係をつけたのが、ムーンシャインとして知られる理論である。前者は 19 世紀、後者は 20 世紀後半に発見、研究された対象で、その二つの理論の関係は未だ明らかにされていない。関係があるという証拠もないが、唯一、代表者の 1996 年の研究で、 j -関数のフーリエ係数を楕円点での値による有限和の形で書き表す公式が見いだされている。一方、 j -関数の双曲点、すなわち実二次点での振る舞いについては、何も分かっていないと言ってよい。これについて代表者は、2009 年に、楕円モジュラー j -関数の実二次点における「値」を一種の繰り込み操作により定義し、その基本性質を調べ、興味深いと思われる幾つかの現象を観察した。また同じ頃 Duke-Imamoglu-Toth は同様の量のある種の平均を考え、その母関数が mock modular 形式という良い対象になっていることを示した。しかもそれに付随する shadow という対象が虚二次点での値と密接に関係する。そこで、萌芽研究というには余りにも夢物語のようなものかも知れないが、この楕円、放物、双曲点での話を「三幅対」として統一的に見られるような、何か良い立脚点はないだろうかと考え、 j -関数をより広く拡張することを試みるべく考察を始めた。示唆的な研究として、Etienne Ghys の研究がある。彼は、実二次点で定める $SL(2, R)/SL(2, Z)$ (これは 3 次元球面から torus knot L を抜いたものと同相) における結び目と L との絡み数が Rademacher 関数と呼ばれる、Dedekind エータ関数の変換公式に現れるある数論的関数により書けることを示した。この結び目の何らかの不変量、あるいは L との関係で定まる量が j -関数の上述の実二次点での「値」と関係すれば大変面白い。一方、ムーンシャイン現象に関しては、代表者は数年前に、古典的な二変数のヤコビタ関数とその「零値」との関係に対応するような、「零値」が j -関数になるような「二変数 j -関数」を定義して、零値以外の特殊化として、レベル 2 および 3 の Hauptmodul (Thompson 級数) が現れることを示した。これら j -関数の拡張を通して、三幅対の実質的な関係を得ることが出来ないか、というのが研究開始当初の目論見であった。

2. 研究の目的

上述のように、楕円モジュラー j -関数を二通りに拡張し、 j -関数の楕円点、放物点、双曲点での値や振る舞いに現れる数論を有機

的に関連づけて理解することが目的である。一つ目の $SL(2, R)$ への拡張では、以前の研究で発見した j -関数の実二次点での特徴的な振る舞いを理解し、「クロネッカーの青春の夢」の実二次体版に何らかの貢献をしたいというのが大きな目的である。

いま一つ、 j -関数の「二変数化」という別の拡張の試みを通し、これもかつて研究した虚数乗法と j -関数のフーリエ係数の関係を見直し、この二変数化が内蔵している別のトンソン級数をも巻き込む形の、いわゆるムーンシャイン現象と虚数乗法の間の実質的な関係を見出すのがもう一つの目的である。

そして究極の大目標は、第一の目的と第二の目的を何らかの形で融合させ、虚数乗法論、実二次体の数論、ムーンシャイン現象、これらの間の新しい相互関係(三幅対)を発見することである。

3. 研究の方法

Zagier, Duke, Imamoglu らとの議論を深め、とりわけ神秘的であると思われる、実二次点での値、とくにマルコフ二次無理数での値の性格についての理解を少しでも深めながら、それと他の二つとの関連を探る。計算機も援用し、数値実験も行いながら新たな現象の発見を目指す。結び目不変量やムーンシャインについては専門家からの知識提供を受け、理解を深める。また、温故知新の精神で、Hecke や Siegel などの古典を見直すことで研究のヒントを得るべく努める。

4. 研究成果

以前、虚数乗法を持つ楕円曲線の周期をガンマ関数を用いて表す Chowla-Selberg 公式の一般化のために計算した、二次体の整環のゼータ関数について、徳島大学の水野義紀がより一般の種の指標の L 関数を具体的に書き切る計算を行った。これを用いると、代表者がかつて予想した、虚二次体の類数を実二次無理数の連分数展開を用いて計算する Hirzebruch-Zagier の公式の、4 で割って 1 余る場合の対応物が得られる。これら一連の計算を共同で何度か口頭発表し、論文としてまとめているところである。この仕事は実二次体のゼータ、 L 関数と深く関連するが、 j -関数への応用ははまだ見えていない。

実二次体自身の研究として、以前より進めてきた caliber (類数よりは粗い分類量) の研究において、その偶奇を完全に決定するという仕事の一部瑕疵が見つかり、その修正に多少時間を要したものの完成し、最終的に論文が出版された。

モジュラー形式や頂点作用素代数との関連では、以前 Zagier と調べた、ある種の微分方程式を満たすモジュラー形式を用いて二次元共形場理論の分類を見直し、その考察を解が対数項を持つ場合に一般化することにより、ある種の有理頂点作用素代数の非存在を示した。またより高階の場合の分類を通

して、ある型のアフィン Vertex Operator Algebra (VOA) の分類に応用できることを示した。具体的には、正整数レベルをもつアフィン VOA で指標の次元が 5 以下のものをすべてリストアップし、その指標の空間の基底がモジュラー微分方程式の解で張られることを示した。VOA と j -関数はムーンシャイン現象の発見以来近い関係にあり、考察中の 2 変数 j -関数の特殊値としてレベルが 2 や 3 のトンプソン級数が現れることを考えても、何かしらの結びつきを期待したいところである。これらは有家雄介、永友清和、境優一との共同研究である。

また吉田正章と共同で、 n 次元実射影空間における配置と、フィボナッチ多項式の根との間に興味深い関連を見いだした。

その他として、多重ゼータ値や多重ベルヌーイ数の関連でもいくつかの進展を見ている。すなわち、坂田実加と共同で、高さ 1 の多重ゼータ値を、指数に 1 を含まないものたちの和で書く公式を与えたことや、櫻井ふみ、津村博文と共同で多重ベルヌーイ多項式の値のある種の双対性を証明したこと、山本修司と共同で、多重ゼータ値の新しい関係式族（積分一級数関係式と称する）を与え、それと正規化の理論との関連を明らかにしたことなどである。この関係式族がすべての線形関係を与えると予想しており、大変興味深い結果であると思われる。これらは直接に j -関数や実二次体の数論に結びつくわけではないが、ベルヌーイ数と実二次体は、古典的な Ankeny-Artin-Chowla の合同式が示すような非常に興味深い関係がある。多重ベルヌーイ数については、これに対応するような数論的な現象は今のところ見つかっていないが、このような関係を探っていくことは今後の興味深い課題である。

総じて、当初の目的としたことの実現への道のりはまだ遠い感じであるが、それでも周辺の示唆的な研究を遂行することは出来たのではないかと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Masanobu Kaneko, Fumi Sakurai, Hirofumi Tsumura, On a duality formula for certain sums of values of poly-Bernoulli polynomials and its application, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux, (2018), <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkane/papers.html>, 査読有

Masanobu Kaneko, Masaaki Yoshida, Point-arrangements in the real projective spaces and the Fibonacci polynomials, Kumamoto Journal of

Mathematics, 31, 1-13, (2018), <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkane/papers.html>, 査読有

Masanobu Kaneko, Kiyokazu Nagatomo, Yuichi Sakai, The third order modular linear differential equations, Journal of Algebra, 485-1, 332-352, (2017)

DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.05.007, 査読有

Masanobu Kaneko, Yosuke Arike, Kiyokazu Nagatomo, Yuichi Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, Letters in Mathematical Physics, 106 (5), 693 - 718, (2016), DOI:10.1007/s11005-016-0837-7, 査読有

Masanobu Kaneko, Mika Sakata, On multiple zeta values of extremal height, Bull. Aust. Math. Soc., 93, 186-193, (2016), DOI:10.1017/S0004972715001227, 査読有

[学会発表](計 18 件)

Masanobu Kaneko, Genus character L-functions of quadratic orders and class numbers, Low dimensional topology and number theory X, 2018

Masanobu Kaneko, An explicit form of genus character L-functions of quadratic orders and its applications, Trends in Modular Forms, National Institute for Mathematical Sciences (NIMS), 2017

Masanobu Kaneko, On modular differential equations of the third order, Aspects of Automorphic Forms and Applications, 2017

Masanobu Kaneko, Fourier coefficients and singular moduli of modular functions, Conference "Modular forms are everywhere", 2017

Masanobu Kaneko, 有限多重ゼータ値について, 2016 大分整数論研究集会, 2016

Masanobu Kaneko, 楕円モジュラー j -関数, 日本応用数学会年會, 2016

Masanobu Kaneko, 多重ゼータ値, 第 61 回代数学シンポジウム, 2016

Masanobu Kaneko, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, 2016 Seoul-Tokyo conference on number theory, 2016

Masanobu Kaneko, Finite multiple zeta values, Diophantine Analysis and Related Topics, 2016

Masanobu Kaneko, 有限多重ゼータ値について, 第 9 回多重ゼータ研究集会, 2016

Masanobu Kaneko, 有限多重ゼータ値, 京都大学数学談話会, 2015

Masanobu Kaneko, On regularizations of multiple zeta values, Zeta functions of several variables and applications, 2015

Masanobu Kaneko, Finite multiple zeta values, Séminaire de Théorie des Nombres, 2015

Masanobu Kaneko, Poly-Bernoulli numbers, multiple zeta values, and related zeta functions, French-Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications, 2015

Masanobu Kaneko, On finite multiple zeta values, Séminaire de Théorie des Nombres de Caen, 2015

Masanobu Kaneko, On finite multiple zeta values, Séminaire de Groupe d'Etude sur les Problèmes Diophantiens, 2015

Masanobu Kaneko, On the elliptic modular function $j(\)$, Seminar on Algebra, Geometry and Physics, 2015

Masanobu Kaneko, On the elliptic modular j -function, Modular forms workshop, 2015

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/index.html>

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/index-e.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号: 70202017

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()