

令和元年6月18日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13429

研究課題名(和文)四面体方程式と量子群

研究課題名(英文) Tetrahedron equation and quantum groups

研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70221843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：2次元格子模型の可解性を保証するヤン・バクスター方程式の3次元版類似である四面体方程式を表現論的な観点から調べ、一般化量子群という新しい対称性とその表現を得た。また、量子群の表現論からの視点と四面体方程式の解の具体的な表示を確率論における可積分マルコフ過程の研究に応用し、新しい可積分マルコフ過程をいくつか構成してその定常状態の行列積表示を求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般化量子群という新しい対称性を“よい表現とともに見つけ出した意義は大きい。これらの表現は今までに知られていた通常の量子展開環のよい表現と同様に、フュージョン構成法により高い次数の表現を構成することができたり、結晶基底が存在することが予想されるからである。この研究課題の補助期間は終わったが、ここで得られた一般化量子群の表現論の研究は今後も続け、一つの理論としてまとめ上げたいと考えている。

研究成果の概要(英文)：Tetrahedron equation, a 3-dimensional analogue of the Yang-Baxter equation that guarantees the integrability of a 2-dimensional lattice model, was investigated from representation theoretical aspect and a new symmetry which we call generalized quantum group and its representation was obtained. Applying the representation theory of quantum groups and explicit expressions of the solution of the tetrahedron equation to integrable Markov processes in probability theory, we also constructed several new integrable Markov processes and the matrix product formula of their stationary state.

研究分野：数学

キーワード：可積分系 ヤン・バクスター方程式 量子群

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

2次元の統計力学における格子模型の可解性を保証するものとして、ヤン・バクスター方程式があるが、その3次元版類似として Zamolodchikov の四面体方程式といわれるものがある。ヤン・バクスター方程式の解の組織的な構成を動機として量子群が生まれたように、四面体方程式の表現論的な研究は量子群の研究に新たな視点を与え、さらなる発展を促すと考えられる。実際、研究代表者は東京大学の国場敦夫とともに、四面体方程式の解がリー群  $SL_3$  に付随する量子座標環(通常座標環の  $q$  変形)の表現の3つのテンソル積の intertwiner であるという Kapranov-Voevodsky の20年前の研究を踏まえ、リー群  $Sp_6$  に付随する量子座標環の intertwiner として3次元反射方程式(Isaev と Kulish が提唱した2次元反射方程式の3次元版)の最初の解を見つけた。また、神戸大学の山田泰彦も研究に加わり、これらの数理物理学的動機から得られる四面体方程式や3次元反射方程式の解が、有限次元リー環に付随する量子展開環のべき零部分環の相異なる Poincaré-Birkhoff-Witt 基底間の変換行列になっているという事実を見出した。さらには、四面体方程式の解を境界ベクトルで簡約することによって、通常のカッツ・ムーディー・リー環に付随する量子展開環には収まらない一般化された量子群が現れることが見い出された。これらの事実は、四面体方程式の研究が量子群の表現論の研究に新しい視点をもたらすことを示唆していた。

## 2. 研究の目的

本研究では、前述の背景を踏まえ、3年間の研究期間で次の発展的な問題の解決を目指した。

1. 四面体方程式の解を境界ベクトルで簡約することにより、ヤン・バクスター方程式の解を得ることができる(3D-2D 対応)。この手法で実際に対応する量子アフィン代数の表現を調べてみることにより、 $q$ -振動子表現という新しい表現を見出した。この手法を四面体方程式の別の解にも適用して、一般化された量子群の表現を新たに見出す。

2. 四面体方程式の解には量子ダイログ関数の積分核をもち関数空間に働く作用素もある。この解を、前述の3D-2D 対応によりヤン・バクスター方程式の解へもっていくと、過去に調べられた巡回型  $R$  行列になるという予想がある。これについて詳しく調べ、さらに付随して存在するはずのアフィン量子群の  $q$  が1のべき根のときの巡回表現についても調べる。

3. knot の不変量として有名な Jones 多項式があるが、これは1次元多様体の3次元への埋め込みの位相不変量である。一方、2次元多様体の4次元への埋め込みについての不変量はまだ全く調べられていないのが現状である。四面体方程式はヤン・バクスター方程式が knot の不変量において果たした役割を後者の不変量の場合に果たすものと考えられる。この可能性について検討する。

今までの研究代表者らの研究からも推察されるように、1、2の研究が結実すれば量子群の表現論へのインパクトは大きいと予想される。また、3も大変チャレンジングな課題である。

## 3. 研究の方法

まず課題1に取り組む。この研究に現れる  $L$  作用素や  $R$  行列は既にわかっており、最も取り組みやすいからである。国場やその大学院生がそれらのデータを取り入れた数式処理プログラムを持っているので、その実験結果を吟味しつつ、 $L$  と  $R$  が混じった場合の一般化量子群の生成元の作用、関係式等の予想を立て、表現を特定する。証明は国場・尾角が担当する。

課題2については、国場およびキャンペラ大学の研究協力者 Sergeev と行っている共同研究を継続する。集中した議論が必要になれば Sergeev を日本に招聘する。modular double や量子ダイログ関数の表現論への応用については京都大学の Ip が詳しいので、緊密な研究交流を図る。

課題3は、もともと研究代表者の所属機関である大阪市立大学のトポロジー専門の教員との懇談中に出た話題であることもあり、まずは大学内でのいろんな機会における議論を繰り返したい。その中からより具体的な課題が浮かび上がってくることを期待する。

課題1では計算機による数式処理実験が必要であるが、そのプログラムを山田とも協力して作成する。一般にこのような組合せ論的な計算機実験には膨大な時間がかかる。数式処理ソフトウェアを必要となればバージョンアップしたりして、計算機環境の充実を図る。代数学や表現論、組合せ論関係の図書を購入することによって更なる研究環境の充実を図る。

#### 4. 研究成果

平成27年度は、研究協力者の国場敦夫や Sergeev とともに、四面体方程式から2次元簡約によって得られるヤン・バクスター方程式の解について調べた。まず解の対称性に付随して現れる一般化された量子群について研究し、2次元簡約の際に量子空間にL行列とR行列が混じる場合について生じる量子群のシュバレー生成元による関係式について詳しく調べ、セール関係式も込めて書き下すことに成功した。また、富山大学の山根宏之の協力も得て量子超リー代数との関係も見出した[雑誌論文 ]。その後、確率論における可積分な連続時間マルコフ過程と本研究の課題である四面体方程式や量子群との関連が少しずつ明らかになってきたので、国場とともに研究の重点をこちらの方にシフトさせた。この分野では1次元周期格子上の完全非対称排他過程(TASEP)とよばれる確率過程に興味もたれているが、その多状態版の定常状態を構成する Ferrari-Martin アルゴリズムがアフィンA型量子群のR行列の $q=0$ 極限と同定できることを示し、四面体方程式の2次元簡約から得られるR行列の表示を応用して多状態TASEPの定常状態の行列積表示を求めた[雑誌論文 、 ]。

平成28年度はまず、1次元周期格子上の完全非対称ゼロレンジ過程(TAZRP)とよばれるマルコフ過程の多種(multi-species)版を考察し、四面体方程式の解やA型量子アフィン代数の対称テンソル表現に付随した組合せ論的R行列を用いて定常状態を記述した。また、その非斉次な一般化も考察した[雑誌論文 、 、 ]。次に、上記の多種TAZRPや今までに知られていた多くの1次元可積分マルコフ過程を含むような確率過程を、A型量子アフィン代数の表現論を駆使して構成した。その際にもとになるビルディングブロックは、従来から知られていた対称テンソル表現の量子R行列を、ヤン・バクスター方程式を保存するように変形したものであることを発見した。このR行列は、行列要素が0以上であり各列の和が1であるという確率条件を満たすので、確率論的R行列とよぶことにした[雑誌論文 ]。年度後半はこのマルコフ過程の研究をさらに推し進め、定常状態を $q$ 振動子代数の元の無限積のフォック空間におけるトレースとして表示した。ここでは可積分系研究に由来するザモロドチコフ・ファデーフ代数が効果的に活用される[雑誌論文 、 ]。

平成29年度は主に二つの研究を行った。一つ目は、国場、Sergeev と2015年に行った研究を発展させたものである。そこでは四面体方程式の解の簡約の研究から、我々が一般化量

子群と呼んだホップ代数の表現を得たのであるが、ソウル国立大学の Kwon とともに、A 型の場合にこの表現をもとにしてフュージョン構成法によって新しい表現を構成した。この表現は代数から定まるある条件を満たす 2 つの正整数の組によってパラメトライズされる。また Benkart-Kang-柏原による A 型量子スーパー代数の表現の結晶基底の構成を参考にして、我々の場合にも結晶基底の存在を示した。二つ目は研究目的からはやや外れた話題ではあるが、研究代表者が長年取り組んできた量子アフィン代数の表現論の組合せ論的側面に関する研究である。すべてのアフィンリー環に付随して  $X=M$  予想という予想があり、これは Kirillov-Reshetikhin 結晶のテンソル積内の最高ウェイト元(パス)と艦装配位という組合せ論的対象の間のウェイトおよび統計量を保存する全単射の存在を示唆している。このような全単射の存在は、A 型や D 型においてはそれぞれ Kirillov-Schilling-Shimozono (2002 年), 尾角-坂本-Schilling-Scrimshaw (2017 年)によって証明されていたが、今回すべての非例外型アフィンリー環に対して証明することに成功した。鍵となったのは尾角-Schilling-Shimozono によって 2003 年に導入された virtual crystal という手法である[雑誌論文]。

本研究の元々の補助事業期間は平成 29 年度までであったが、A 型一般化量子群の表現論の研究に遅れが生じたため、1 年間の延長を申し出て承認された。29 年度は四面体方程式と量子群に関連して主に二つの研究を行った。一つ目は、研究協力者 Kwon との前年度からの研究の続きである。A 型一般化量子群の表現のフュージョン構成、結晶基底の存在、その組合せ論的構造の解明については春のうちに論文にまとめることができた[プレプリント]。さらに Kwon とは、量子アフィン代数における  $q$ -振動子表現の結晶基底の存在について検討を開始している。二つ目は 3 次元反射方程式と関連させた 2 次元反射方程式の研究である。3 次元反射方程式には四面体方程式の解が現れる。一般に反射方程式とは、量子可積分系において境界がある系の可積分条件を与える方程式である。研究協力者の国場と Pasquier による研究によって、3 次元反射方程式の 2 次元簡約から 2 次元反射方程式の解が得られることが分かっていた。この解を量子アフィン代数の表現論から特徴づけようと、国場とともに年度後半に研究を開始した。その結果、それらの解は量子アフィン代数の適当な部分代数で、余積に関して余イデアル条件を満たすものの intertwiner として特徴づけられることがわかった[プレプリント]。この研究は大きく一般化させることができると期待され、今後も鋭意研究に取り組んでいく。

補助事業期間を通しては、当初の研究目的の課題 2, 3 については、ほとんど進展させることができなかったが、確率論における可積分なマルコフ過程と本研究課題の関連が明らかとなり、この分野で一定の貢献を果たせたのは予期せぬ収穫であった。この研究課題で見出した一般化量子群や反射方程式の解については、まだ調べるべきことが多く残されているので、関連する話題の研究を今後も続けていく。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 14 件)

A. Kuniba, H. Lyu, M. Okado, Randomized box-ball systems, limit shape of rigged configurations and Thermodynamic Bethe ansatz, Nuclear Physics **B937** (2018) 240-271; DOI:10.1016/j.nuclphysb.2018.10.008 [査読有]

M. Okado, A. Schilling and T. Scrimshaw, Rigged configuration bijection and proof of the  $SX=MS$  conjecture for nonexceptional affine types; DOI:10.1016/j.jalgebra.2018.08.031 [査読有]

A. Kuniba, M. Okado and S. Watanabe, Integrable structure of multispecies zero range

process, SIGMA **13** (2017), 044, 29 pages; DOI:10.3842/SIGMA.2017.044 [査読有]

A. Kuniba and M. Okado, A q-boson representation of Zamolodchikov-Faddeev algebra for stochastic R matrix of  $U_q(A^{(1)}_n)$ , Lett. Math. Phys. **107** (2017), 1111-1130; DOI:10.1007/s11005-016-0934-7 [査読有]

A. Kuniba and M. Okado, Matrix product formula for  $U_q(A^{(1)}_2)$ -zero range process, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, (2017) 044001 (20pp); DOI:10.1088/1751-8121/50/4/044001. [査読有]

A. Kuniba, V.V. Mangazeev, S. Maruyama and M. Okado, Stochastic R matrix for  $U_q(A_n^{(1)})$ , Nucl. Phys. **B913** (2016), 248-277; DOI:10.1016/j.nuclphysb.2016.09.016 [査読有]

M. Okado, R. Sakamoto, A. Schilling and T. Scrimshaw, Type  $D_n^{(1)}$  rigged configuration bijection, J. Algebr. Comb. **46** (2017) 341-401; DOI:10.1007/s10801-017-0756-4 [査読有]

A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation, Journal of Integrable Systems (2016) 1(1):xyw008; DOI:10.1093/integr/xyw008 [査読有]

A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Inhomogeneous generalization of multispecies totally asymmetric zero range process, J. Stat. Phys. **164** (2016), 952-968; DOI:10.1007/s10955-016-1555-3 [査読有]

A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R, Journal of Integrable Systems (2016) 1(1): xyw002; DOI:10.1093/integr/xyw002 [査読有]

A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, J. Phys. A: Math. Theor. **49**, (2016) 114001 (22pp); DOI:10.1088/1751-8113/49/11/114001 [査読有]

A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, (2015) 34FT02 (19pp); DOI:10.1088/1751-8113/48/34/34FT02 [査読有]

M. Okado, Similarity and Kirillov-Schilling-Shimozono bijection, Algebras and Representation Theory **19**, (2016) 975-989; DOI:10.1007/s10468-016-9607-6 [査読有]

A. Kuniba, M. Okado and S. Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, (2015) 304001 (38pp); DOI:10.1088/1751-8113/48/30/304001 [査読有]

[学会発表](計10件)

M. Okado, Integrable systems arising from Kirillov-Reshetikhin crystals of quantum affine algebras, SIDE 13, Nov 11-17, 2018, Fukuoka

尾角正人、A型一般化量子群のKRクリスタル、日本数学会2018年度秋季総合分科会無限可積分系一般講演、2018年9月24日~27日、岡山大学

尾角正人、アフィン非例外型のパスと臙装配位の全単射、日本数学会2018年度年会、2018年3月18日-21日、東京大学

M. Okado, Generalized quantum groups and fusion procedure, MATRIX program "Non-Equilibrium Systems and Special Functions", January 8-February 2, 2018, Melbourne University Creswick Campus, Australia

尾角正人、箱玉系再訪、研究集会「可積分系の数理と応用」、2017年9月4日-6日、京都大学数理解析研究所

M. Okado, Integrable stochastic models and quantum groups, Frontiers in

Mathematical Physics, January 6-9, 2017, 立教大学

M. Okado, Crystal bases and rigged configurations, The 28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, July 4-8, 2016, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

尾角正人、多状態 TAZRP、日本数学会 2016 年度年会、2016 年 3 月 16 日-19 日、筑波大学

M. Okado, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, Shanghai Conference on Representation Theory, December 7-11, 2015, Tian He Hotel, Chongming Island, Shanghai, China

M. Okado, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, 8th Southeastern Lie Theory workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory, October 9-11, 2015, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina

〔図書〕(計 1 件)

中村佳正、高崎金久、辻本諭、尾角正人、井ノ口順一著、解析学百科 II 「可積分系の数理」、朝倉書店、2018 年(第 3 章「可解格子模型」担当)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

〔プレプリント〕

A. Kuniba, M. Okado, A. Yoneyama, Matrix product solution to the reflection equation associated with a coideal subalgebra of  $U_q(A^{(1)}_{n-1})$ , arXiv:1812.03767.

J.-H. Kwon and M. Okado, Kirillov-Reshetikhin modules of generalized quantum group of type A, arXiv:1804.05456.

## 6. 研究組織

(1) 研究分担者

なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：国場 敦夫

ローマ字氏名：(KUNIBA, Atsuo)

研究協力者氏名：Sergey SERGEEV

研究協力者氏名：Jae-Hoon KWON

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。