2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：５４６０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ１３４３０

研究課題名（和文）クイバーに付随する概均質ベクトル空間の組み合わせ論的分類

研究課題名（英文）A Combinatorial Classification of Prehomogeneous Vector Spaces Associated with Quivers

研究代表者

名倉　誠（Nagura, Makoto）

奈良工業高等専門学校・一般教科・准教授

研究者番号：３０３７５３９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，まず既約なルート系の部分集合が張る格子の基底を分類しその個数を数え上げることに成功した．この数え上げには一般化されたスターリング数が現れる．本研究の結果は，その一般化されたスターリング数の反転公式の組み合わせ論的な意味を与えたことになる．

また，重み付きグラフに付随する表現として基礎体が代数閉体とは限らない概均質ベクトル空間が現れるが，本研究の結果では，とくに正則な概均質ベクトル空間に絞って研究を進め，Dynkin型のクイバーに付随する正則概均質ベクトル空間を数え上げることに成功した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の成果により，クイバーに付随する表現を格子の観点から調べる際に必要な計算のための手がかり（すなわち，例えば格子の基底の標準形，正則概均質ベクトル空間を与える格子の個数など）が得られた．

研究成果の概要（英文）：We obtained the number of standard forms of the bases of lattices that are spanned by subsets of irreducible and reduced root systems. In this result is expressed by a unified (and generalized) Stirling numbers. In particular, our result gives an combinatorial example of inversion formula for unified Stirling numbers.

In general, the ground field of prehomogeneous vector spaces associated with valued graphs may not be algebraically closed. We studied, in particular, such prehomogeneous vector spaces under the assumption that they are regular; and then we counted the number of them.

研究分野：代数学

キーワード：クイバーに付随する表現　正則概均質ベクトル空間　スターリング数　重み付きグラフ

１．研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間の理論は1960年代に佐藤幹夫によって創始されたが,概均質ベクトル空間の分類は未解決のままである．概均質ベクトル空間は佐藤幹夫・木村達雄によって既約表現の場合に初めて分類され，その後V.Kacや木村達雄・笠井伸一・保倉理美をはじめ現在に至るまで様々な場合に（すなわち，群や表現に様々な条件をつけて）分類が与えられている．しかしいずれも基礎体が代数閉体の場合であり，次元の条件などによる単なる「リストアップ」のみにとどまっている感が否めない．

とくにV.Kacや木村・笠井・保倉らの先駆的な研究によって,「半単純」というクラスの概均質ベクトル空間の分類の本質的な部分は，ディンキン(Dynkin)型のクイバー Q （すなわちディンキン図形の各辺に向きをつけた有向グラフ）に付随する表現（すなわち Q と次元ベクトル d から定まる特殊線形代数群の直積による表現）で概均質ベクトル空間になるものの決定にあることがわかっていた．

これについて研究代表者は2009年，Q の部分ルート系が張る格子の（非負整数係数の）格子点 d と，無限個の軌道を持つ表現との１対１対応を見出した．この対応の発見によって，Q に付随する概均質ベクトル空間の分類の本質的な部分が，傾加群(tilting module)の分類として言い換えられることが明らかになった．

２．研究の目的

このような背景に基づき，本研究では「クイバー Q に付随する概均質ベクトル空間の分類」＝「 Q の部分ルート系が張る格子の分類」と言い換える．本研究の目的は，クイバー Q に付随する表現が概均質ベクトル空間になるための次元ベクトルの条件を決定し，その格子点としての意味を探ることにある．傾加群の理論の文脈でそれを理解し，単なるリストアップにとどまらない新しい分類を目指している．

また，ディンキン型クイバーであっても多重矢印を含むものには重み付きグラフが対応し，その結果として実は，基礎体が代数閉体ではない概均質ベクトル空間が現れる．しかしこの事実はまだ広くは知られておらず，従来の分類理論の範疇からは外れていた．このような基礎体を代数閉体としない概均質ベクトル空間の基礎理論を構築することも本研究の目的である．

３．研究の方法

（1）格子の数え上げ

クイバー Q に付随する概均質ベクトル空間の分類にあたって，まず Q の部分ルート系が張る格子の分類をする必要がある．まずディンキン型のクイバーに絞り，計算機を用いて徹底的な格子の数え上げを行う．この数え上げは Q のルート系内の，ある条件をみたす「部分ルート系」の分類に相当する．本研究ではまずそのような格子の基底の「標準形」を見出し，組み合わせ論的意味を考察する．

A型のルート系の部分集合が張る格子の個数が，スターリング(Stirling)数や超幾何級数の特殊値として表示できることはわかっていた．他の型についても同様な表示を行い，それぞれの基底を具体的に与えることで組み合わせ論的意味を考察する．

この際，　スターリング数の一般化の可能性も探る．またディンキン型以外のタイプについて

も着手し，ルート格子の標準形の数え上げに現れるスターリング数のさらなる一般化や，その背景を探る．

（２）良い格子（正則概均質ベクトル空間）の観察

グラフの部分ルート系が張る格子のうち「傾加群を与える格子」を見出すために，例えば概均質ベクトル空間 に「正則(regular)」という強い条件（これは対応する加群の自己準同型環が半単純ということ）をつけ，対応する部分傾加群の数え上げを行う．

この際，とくに正則概均質ベクトル空間の指標群・相対不変式に注目して，その環論的意味を考察する．

（３）基礎体が代数閉体でない概均質ベクトル空間の分類

ディンキン 図形のうち多重線を持つグラフ（B_n 型，C_n 型，F_4 型，G_2 型）では「重み付きグラフ」が現れ，基礎体が代数閉体ではない概均質ベクトル空間を考える必要がある．このような概均質ベクトル空間は石井佑来美の学位論文で考察されていたが，まだよくわかっていないことが多い．そこで本研究では，重み付きグラフから得られる概均質ベクトル空間の，傾加群を用いた新しい分類理論の基礎を構築する．

上述のディンキン型のクイバーの研究をもとに，次の段階として Euclid 型，双曲型にも着手する．あるいは，より具体的にグラフを固定して，それに付随する半単純概均質ベクトル空間，とくに正則概均質ベクトル空間とそれに対応する格子の考察を進めていく．

４．研究成果

（１）格子の数え上げ

考察の対象をディンキン型クイバーに絞った結果，そのルート系の部分集合が張る格子を数え上げることに成功した．そのような格子の個数は一般化されたスターリング数を用いて表示されることがわかった．本研究ではこの一般化されたスターリング数についての考察を進め，L.Hsu・P.Shiue によって導入された「統一スターリング数」を拡張し，その反転公式を与えた．この公式は２項係数変換(binomial transformation)の一般化でもあり，よく知られた associated スターリング数の反転公式（r-associated と(r+1)-assosiated との関係式）の一般化にもなっている．さらに，古典的第２種スターリング数の明示公式も，この反転公式の特殊な場合であるという解釈も得られた．

また，ルート系の部分集合が張る格子の基底の「標準形」を見出すことができた．これは 2011 年に発表した「余次元１」の結果（Int.J. Algebra 5 (2011), 591–634）の精密化（任意の余次元への拡張）でもある．この数えげには複数の方法を見出すことができ，その一つは，上述の統一スターリング数の反転公式の組合せ論的な意味を与えている．

これらの結果は，関東学院大学の大谷信一氏，松江工業高専の神吉知博氏とともに Tsukuba J. Math. 42 (2018), 97–125 として発表した．

（２）良い格子（正則概均質ベクトル空間）の観察

概均質ベクトル空間の生成点を与える傾加群の分類にあたって，考察の対象をディンキン型に絞り，hom-orthogonal という良い条件（これは自己準同型環が半単純という条件）をみたす部分傾加群を数え上げることに成功した．この結果は，2014 年に発表した ADE 型（多重線を持たないグラフ）の結果（Comm. Algebra 42 (2014), 4561–4577）を補完するものであり，これ

でディンキン型全ての，正則概均質ベクトル空間の個数が数え上げられたことになる．この成果は，東京学芸大学の長瀬 潤氏，松江工業高専の神吉知博氏，沼津工業高専の黒澤恵光氏とともに論文にまとめ，査読付き雑誌に投稿中である．

なお，正則概均質ベクトル空間を与える格子の個数は２項係数を用いて記述できるが，その組合せ論的な意味は不明のままである．また個数を数え上げたものの，それぞれの格子どうしの簡明な「繋がり」は現在のところ見出せていない．これらは今後の課題ではあるが，本研究では今後の研究の指針となる具体例が多く得られたことが，萌芽研究としての成果と言える．

（３）重み付きグラフに付随する表現

重み付きクイバー（有向グラフ）に付随する表現として，基礎体が代数閉体ではない概均質ベクトル空間が現れる．本研究では考察の対象をディンキン型に絞り，とくに上述の格子の計算に関連して，基礎体が代数閉体ではない正則概均質ベクトル空間に関する理論を整理した．

これに関して，沼津工業高専の黒澤恵光氏の指摘により，重み付きディンキン型クイバーに付随する表現で hom-orthogonal な部分傾加群に対応する表現は,係数体を代数閉体に拡大すると実際に普通の意味での正則概均質ベクトル空間であることがわかった．

この成果により，クイバーに付随する表現を格子の観点から調べる際に必要な具体的な計算のための手がかりと，その基礎的な理論が得られたことになる．また，本研究で得られた重み付きグラフに付随する正則概均質ベクトル空間に関する知見をもとに，今後の概均質ベクトル空間の組み合わせ論的な分類を進めていくことができそうである．

とくに，部分ルート系が張る格子を「細分」することによって概均質ベクトル空間の生成点に対応する傾加群の垂直圏（の基底＝simple objects）が得られる場合があることがわかった．この垂直圏の基底や相対不変式の存在を手がかりに，正則概均質ベクトル空間についての新しい知見を探るというのが今後の一つの指針と言えそうである．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

- T. Kamiyoshi, M. Nagura and S. Otani,
  Associated Binomial Inversion for Unified スターリング Numbers and Counting Subspaces Generated by subsets of a root system,
  Tsukuba Journal of Mathematics 42 (2018), no. 1, 97–125.

〔学会発表〕（計１件）

- 神吉知博，黒澤恵光，長瀬 潤，名倉 誠，
  重み付き Dynkin グラフに付随する hom-orthogonal な部分傾加群の数え上げ,
  2016 年 3 月，日本数学会 2016 年度年会（於 筑波大学）での一般講演．

〔その他〕

○ホームページ

- http://www.libe.nara-k.ac.jp/~nagura/

６．研究組織

(1)研究分担者

該当なし

(2)研究協力者

該当なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。