様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４３５

研究課題名（和文）非対称距離空間の測地線の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometry of geodesics for spaces with non-symmetric distances

研究代表者
印南　信宏（Innami, Nobuhiro）

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：２０１６０１４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：　測地線が定義できる距離空間を測地空間と呼ぶ。測地線の幾何学は測地空間を測地線の定性的な性質に注目して研究する方法を提供している。リーマン幾何学、フィンスラー幾何学、アレキサンドルフ幾何学などがその例である。その中で、距離が非対称な空間については、以前から興味をもたれながら、体系的には研究されていない。個々の性質や定理について、対称距離の場合と同様にその性質が成り立つかどうかを検証しながら、フィンスラー計量から生じる非対称測地空間を中心に、測地線の幾何学の方法で研究し、いくつかの成果を得た。それらの成果を論文として発表した。

研究成果の概要（英文）：A geodesic space is a metric space where geodesics are defined.Geometry of geodesics provides tools to study the topological and geometrical structure of geodesic spaces. Riemannian geometry, Finsler geometry and Alexandrov geometry are those examples.It is not studied systematically the space where distance is non-symmetric in that while it is always interested.I studied each property and theorem known in the symmetric case to get their generalizations and new results in the non-symmetric case by geometry of geodesics.I announced those result as some articles.

研究分野：測地線の幾何学

キーワード：測地線　リーマン幾何学　フィンスラー幾何学　非対称距離の幾何学　カット－ローカス　平行線の理論　測地円の漸近挙動　ブーズマン関数

１．研究開始当初の背景

測地線の幾何学は、フィンスラー幾何学の煩雑な計算を避けるために、測地線が持っている定性的な性質に注目して図形の性質を調べるものである。ブーズマンはその方法を1955年に出版されたGeometry of geodesicsにまとめている。多くの定理の中で、距離の対称性は本質的ではないことも指摘している。また、1973年には、測地線の集合が持っているような性質を持つ曲線族が与えられる距離空間（Chord space と呼ばれる）の研究を創出している。

1960年代終わり頃から、リーマン幾何学における測地線の幾何学が急激に発展した。その方法を見ると、測地線族から生じる変分ベクトル場の大きさを断面曲率やリッチ曲率を使って評価し、その測地線族の性質を調べ多様体の位相構造や距離構造を見出している。

フィンスラー幾何学も古くから研究されていたが、計量から導かれるテンソルの研究が中心であった。測地線に関しては、幾何学分野よりも力学系理論分野の研究者によって、ハミルトン力学系や測地流の研究として発展してきた。2000年頃から、フィンスラー幾何学における測地線の幾何学の研究者が増大し始めた。リーマン計量に関して成立する結果がフィンスラー計量に変更したとき、同様に成立するかどうか、プラスアルファを仮定するとどうか、などの研究が主になされている。

リーマン幾何学における測地線の幾何学の中心的な話題は、球面定理や非正曲率多様体の分類等で代表される位相構造や位相構造と関係した距離構造の研究が中心であった。多様体には常にリーマン計量が導入されるのだから、扱い難いフィンスラー計量の方を使って、多様体の位相構造を研究する必要はないという考えもある。それに対して、力学系理論では、可積分性やエルゴード性が話題となり、フィンスラー計量の測地流を考察することがリーマン幾何学におけるよりも自然な拡張と考えられる。したがって、フィンスラー幾何学における測地線の幾何学はその計量からどのような測地線族が存在するかという研究を中心にすべきと考える。

研究代表者は、20年ほど前にターゲットの曲線族に対して、その曲線族が測地線族となるリーマン計量を導入して調べる方法を提案した。フィンスラー計量から生じる測地線族をリーマン計量の測地線族と見做せるようにするのみならず、リーマン多様体中に異なった計量を持った媒質が存在しその媒質内の測地線族の挙動を外のリーマン計量を用いて調べる方法である。リーマン幾何学で非常に重要な役割をするラウチの比較定理の成立まで研究した。しかし、ホイヘンスの原理と密接な関係にあり、フィンスラー幾何学とは異なる扱いをしている接触幾何学やハミルトン力学系が発展していたので研究を打ち切ってしまった。しかし、現在の測地線の幾何学の研究動向を考慮すると、このアイデアによる研究を復活継続させることに価値が出てきたと思われる。

２．研究の目的

本研究では、フィンスラー幾何学を測地線の幾何学の立場から研究する。特に、非対称距離空間の内部幾何学の一般論を展開しながら研究を進める。今まで行われていた多様体の位相構造や測地流の研究ではなく、測地線族の存在に関して、非対称距離空間の場合には、対称な距離空間の場合とどんな差異が生じるかに焦点を絞って研究する。

３．研究の方法

数学のオーソドックスな研究法に従って研究を進める。すなわち、フィンスラー幾何学における測地線の幾何学に関連した文献を調べたり、関連した研究を続けていた研究者と情報やアイデアの交換、議論や研究打ち合わせなどを行いながら研究を進める。また、シ

ンポジウムや研究会に参加し、講演を聞くことにより思わぬところからアイデアが生まれる。したがって、研究機関へ出張し直接会って議論や研究打ち合わせを行うほか、測地線の幾何学関連分野の研究者の講演がある研究集会に参加する。研究成果を積極的に発表するために、シンポジウムや研究会に参加する。また、数学の研究では、計算や論証の僅かなギャップも許されないので、旨く証明できたと思われる場合でもその証明の再検証が重要である。これを行うためには、研究内容を理解できる研究者に研究成果を説明し議論する。この研究は個人研究である。

　このような研究スタイルなので、研究で大切なのは、問題解決のアイデアを捜す不断の努力と、閃いたアイデアで解決に結びつける計算や論証の努力である。すなわち、文献の探索、他の研究者からの情報提供、議論および研究打ち合わせがほとんどである。そのため、研究期間中の具体的な研究計画は毎年度ほぼ同じであり、アイデアを見つける作業が重要な部分を占めるので、３年間にわたる研究にすることにより成果が確実なものになる。

４．研究成果

(1) 1-径数等長変換群が作用する向きの付いた Finsler 曲面の分類を行った。位相的には，球面、トーラス、シリンダー、平面に限ることを見出した。その中で、軌道が平行円と見做せるものを回転面と呼ぶ。回転 Finsler 曲面の平行円に挟まれた領域は、回転トーラスに等長的に埋め込めるので、回転 Finsler トーラス上の測地線の挙動を詳しく研究することが最も重要である。トーラス上の測地線の挙動は、普遍被覆空間上の測地線の挙動を記述すれば､その射影として知ることができる。その際に、1-径数等長変換群を含む可換群が作用していることが重要な役割をする。まず、等長変換で普遍な直線がどのように分布しているかを決定する。そのような直線への漸近線を決定する。次に、同じ長さの平行円の持ち上げとして得られる２つの軌道に交互に接して進む測地線の挙動を決定した。回転 Riemann トーラスの場合は、クレローの関係式を使って、これらの挙動を見出すことは容易である。回転 Finsler 曲面の場合は、クレローの関係式に対応する式は見いだせるが、同じように使うことはできないので、大域の測地線の挙動をうまく使う必要がある。内部距離が対称になる回転 Riemann トーラス上の測地線の挙動との大きな違いは、右回りと左回りで構造にずれが生じる点である。この現象により、回転 Riemann トーラス上には常に極が存在するが、非対称な基本関数を持つ回転 Finsler トーラス上には極が存在しない。また、点から出る測地線に関する最小点軌跡と入ってくる測地線の最小点軌跡の違いを明確にする例を与えている。Riemann 幾何学では起こり得ない現象を見出した点で、この研究は意義があり、今後の研究に重要である。また、負曲率空間と正曲率空間の間に位置づけられるトーラス上の研究なので、積分可能力学系の研究にも寄与すると思われる。雑誌論文(4)として発表。

(2)　ブーズマンが開始した平行線の理論は、非正断面曲率の完備リーマン多様体に関する無限遠点の幾何や測地流の研究などに多く利用されている。その際に重要な働きをするのが漸近線の関係が同値関係になることである。特に、測地流の研究では、ブーズマン関数が２階連続的微分可能になる性質が役立っている。しかし、一般に、ブーズマン流の定義では､平行線の関係は同値関係にはならないし、ブーズマン関数の２階微分可能性も成立しない。共役点を持たない完備リーマン多様体においては、測地線に沿う安定ヤコビ場が有界でるときに、平行線関係の同値性やブーズマン関数の２階微分可能性が証明されている。本研究において、完備フィンスラー多様体上で、平行線関係の同値性とブーズマン関数の

２階微分可能性の関係を遠方の点までの距離関数の３階微分の有界性を使って明らかにした。この研究で採用した仮定と従来の仮定との関係は不明であるが、測地線に沿う安定ヤコビ場が有界でない２階微分可能なブーズマン関数は存在する。

ブーズマンの意味での平行線関係は射影変換を施しても保たれる。閉１次微分形式によるランダース変換は射影変換なので、平行線の関係が同値関係となる計量から同じ性質を持つ計量が容易に構成できる。このことに注意して、リーマン幾何では知られていない平行線関係が同値関係となるリーマン計量の構成法を見つけた。平行線の理論のもう一つの有用な応用は、平坦帯定理を用いたリーマン多様体の剛性定理であるが、フィンスラー幾何学で剛性定理を扱うのは不向きであることを示唆している。雑誌論文(3)として発表。

(3) リーマン幾何学の球面定理などの位相構造を決定する問題では、カットローカスが重要な役割をしている。特に、点からのカットローカス上の最近点で何が起きるかが重要であった。クリンゲンバーグはこの最近点で起きることを解明して、球面定理の証明に成功した。 すなわち、最近点までの最短測地線に沿ってその点が共役点でなければ、最短線がちょうど２本ありその接ベクトルは最近点で一次従属となる。その後に、ベルジェや大森によって、点からカットローカスの最近点までの２本の最短線が一次独立の場合にどのようなことが起きるか解明された。最短測地線の接ベクトルの立場からはこのように述べられるが非対称計量の幾何学ではこの状態をうまく記述できない。これは、基本テンソルから定まる内積が接ベクトルに依存するので、距離球の接空間の状態とその法ベクトルとしての測地線の接ベクトルの関係を内積を使って記述した場合に対応が崩れてしまうことによる。そこで、距離球の接空間を接ベクトルの双対ベクトルで表すと接空間の一致が双対接ベクトルの一次従属性で表現され、フィンスラー幾何学においてもクリンゲンバーグの補題や、ベルジェー大森の定理が同様の形式で成り立つことになる。これを証明し、その応用として、点付きブラシュケ・フィンスラー多様体の位相構造の研究に役立てた。雑誌論文(1)として発表。 リーマン計量の入ったトーラス上のある点を中心とする測地円は十分大きな時間の経過後は、ε稠密になることの証明に成功した。それを一般化した形で、向き付け可能、有限連結な測地的凸なフィンスラー曲面に対する測地円の漸近的な挙動の研究が開始できた。完備性の仮定や境界を持たないという仮定なしで同様の性質が成り立つと予想された。雑誌論文(2)として発表。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　4　件）

① Blaschke Finsler manifolds and actions of projective Randers changes on cut loci, Trans. Amer. Math. Soc.(印刷中）, N. Innami, Y. Itokawa, T. Nagano and K. Shiohama, 査読有り。

② The asymptotic behavior of geodesic circles in any 2-torus : A sub-mixing property, Publ. Math. Debrecen (印刷中), N. Innami, T. Okura, 査読有り。

③ Parallel axiom and the 2-nd order differentiability of Busemann functions, Publ. Math. Debrecen, 91, 3-4 (2017), 403--425, DOI: 10.5486/PMD.2017.7753, N. Innami, Y. Itokawa, T. Nagano and K. Shiohama, 査読有り。

④ Geodesics in a Finsler surface with one-parameter group of motions, Publ. Math. Debrecen, 89, 1-2 (2016) 137--160, DOI: 10.5486/PMD.2016.7442, N. Innami, T.

Nagano and K. Shiohama，査読有り。

〔学会発表〕（計　15　件）

①印南信宏、トーラス上の測地円の漸近挙動、日本数学会年会、2018 年 3 月、東京大学

② 印南信宏、トーラス上の測地線を参考にした曲面上の測地線、研究会「直観幾何学 2018」、2018 年 2 月、椙山女学園大学

③ 印南信宏、射影的ランダース変換とカットローカス、研究会「測地線及び関連する諸問題 2018」、2018 年 1 月、熊本大学

④ 印南信宏、Limit circles in a torus、52nd Symposium on Finsler Geometry、2017 年 9 月、新潟大学

⑤ 印南信宏、射影的ランダース変換とカットローカス、日本数学会秋季総合分科会、2017 年 9 月、山形大学

⑥ 印南信宏、カットローカスの最近点について、日本数学会年会、2017 年 3 月、首都大学東京

⑦ 印南信宏、非対称距離空間の幾何学、研究会「直観幾何学 2017」、2017 年 2 月、熊本大学教育学部

⑧ 印南信宏、カットローカスの最近点に関する Klingenberg 補題の Finsler 版、研究会「測地線および関連する諸問題」、2017 年 1 月、熊本大学教育学部

⑨ 印南信宏、The Finsler version of Klingenberg's lemma, 51st Symposium on Finsler Geometry, 2016 年 11 月、鹿児島県市町村自治会館

⑩ 印南信宏、平行線の公理と Busemann 関数の微分可能性、日本数学会秋季総合分科会、2016 年 9 月、関西大学

⑪ 印南信宏、Voronoi diagrams and cut loci in surfaces, The Cut Locus : A bridge over differential geometry, optimal control, and transport, August, 2016, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand

⑫ 印南信宏、Finsler 回転面上の測地線の大域挙動、日本数学会年会、2016 年 3 月、筑波大学

⑬ 印南信宏、Geodesics in a Finsler torus of revolution、研究集会「測地線及び関連する諸問題」、2016 年 1 月, 熊本大学教育学部

⑭ 印南信宏、Geodesics in a Finsler torus of revolution, 19th International Workshop on: HERMITIAN-GRASSMANNIAN SUBMANIFOLDS AND ITS APPLICATIONS and the 10th KNUHGRG-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop、Daejeon, Korea, 2015 年 10 月, NIMS

⑮ 印南信宏、曲面上のボロノイ図とカットローカス、日本数学会秋季総合分科会、2015 年 9 月、京都産業大学

６．研究組織

(1)研究代表者

印南　信宏（Innami, Nobuhiro）
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：20160145