様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４３６

研究課題名（和文）特異的な崩壊現象の幾何解析の展開

研究課題名（英文）Development of geometric analysis of singular collapsing phenomenon

研究代表者
山口　孝男（Yamaguchi, Takao）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：００１８２４４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：２次元CAT(1)空間の局所構造の決定のための鍵となる線識面の研究に取り組んだ。２次元CAT(1)空間内の任意の点のまわりの微小領域において、自然に定義された線識面が、その内部距離に関してCAT(1)空間になること、およびそれが２次元円板に同相であることを証明することに成功した。これを基にして今後は、２次元CAT(1)空間の局所構造を、有限個のCAT(1)-空間リプシッツ円板の貼り合わせとして決定して行きたい。
・曲がった空間上の漸近的自己相似集合の概念を導入し、そのハウスドルフ次元を決定し、具体例として、曲面上のシェルピンスキー・ガスケットのハウスドルフ次元を決定した。

研究成果の概要（英文）：I have investigated ruled surfaces in two-dimensional CAT(1)-spaces, which is a key to the determination of the local structure of such spaces. I have succeeded in proving that a ruled surface in a small region around a given point of a two-dimensional CAT(1)-space is a CAT(1)-space for the interior metric, and that it is homeomorphic to a two-disk. Based on this result, I would like to determine the local structure of such a space as a gluing of finitely many CAT(1)-Lipschitz disks, in the near future.
I have introduced the notion of asymptotic self-similar sets, and determined their Hausdorff dimensions. As an application, I have determined the Hausdorff dimension of Sierpinski gaskets on surfaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：CAT(1)空間　特異空間　線識面

１．研究開始当初の背景

これ迄のリーマン多様体の崩壊理論やラプラシアンのスペクトル収束理論では、断面曲率やリッチ曲率の絶対値や下限が押さえられた空間を対象として、多くの成果が得られてきた。一方でリーマン面が、その曲率が－∞に発散しながらグラフに崩壊するなど、特異的な興味深い現象が知られている。例えば種数２以上の閉曲面の上の負の定曲率計量は、直径が有界の下でガウス曲率が－∞ に発散するとき、グラフに崩壊する。 これと類似の現象が、Gromov のデーン手術を用いた例により、3 次元において負曲率多様体の枠組みで起こる。このような 3 次元特有の負曲率多様体の特異崩壊現象を完全に解明することは興味深い。また 3 次元閉多様体上のリッチ流が有限時間で特異点をもつ状況では、曲率が　±∞に発散する。この特異時間における極限空間の局所構造の研究を基に、極限空間の一意性と直径有限性などを決定することも興味深い。このように、曲率の下限を取り去ってこの様な崩壊現象および極限の特異空間の構造を理解することで、新しい重要な知見が得られることが期待される。

２．研究の目的

本研究では、曲率の下限が　-∞に発散するような極めて特異的な崩壊現象を考察し、そして特異崩壊のメカニズムを解明し、新たな研究領域を開発することを大きな目標としたい。具体的な取り組みとして、3 次元負曲率閉多様体の族で、断面曲率が-1 以下、直径が一様に有界なモジュライ空間の中で、断面曲率が -∞に発散するような特異崩壊現象の極限空間の決定、および 3 次元閉多様体上のリッチ流の特異時間における極限空間の一意性や直径有限性を解明したい。

３．研究の方法

曲率の上からのバウンドを設定したとき、CAT(1)空間という特異空間が定まり、このような空間の局所構造の決定が、本研究の遂行上効果的であると思われる。そこで先ず、２次元の CAT(1)-空間の局所構造の決定に注目した。２次元 CAT(1)-空間の幾何学については、Yu.Burago-S.Buyalo により空間の多面体構造を仮定した一連の研究が知られている。しかし一般の CAT(1)空間の局所構造は、２次元に限っても極めてワイルドであり、多面体構造をもたない例が沢山知られている。従って逆に、そのようなワイルドな空間の構造を理解することは、曲率の上からのバウンドの根源的意義を理解する上でも興味深い。正則点集合の構造については、ある程度の結果が知られているものの、特異点集合の構造は全く未解明の状況であった。本研究において永野幸一氏（筑波大学）との共同研究により、始めの、そして恐らく最大の難点をクリヤーすることが出来た。すなわち、２次元 CAT(1)空間内の任意の位相的特異点のまわりの微小領域において、位相的特異点集合を囲む形で自然に定義された細い線識面が、その内部距離に関して CAT(1)空間になることを証明することに成功した。A.D.Alexandrov 自身の研究により、内部距離ではなく線織面を写像とみなし、線識面の定義域のパラメータ空間上に自然に導かれる誘導距離が CAT(1)-空間になる事が古くから知られていた。我々の目的のためには、線識面が（誘導距離ではなく）内部距離に関して再び CAT(1)-空間になることを示す必要がある。線識面の定義測地線の振る舞いや線識面の各点における（内部距離に関する）方向の空間を詳細に調べることにより、内部距離をもつ線識面が Alexandrov の考察したパラメータ空間上の誘導距離に等長的であることを証明することができた。この手法の極めて重要な副産物として、この線識面が２次元円板に同相であることが従う。この結果は２次元 CAT(1)空間の局所構造を解明する上で鍵となるものであり、これを

基にして今後は、２次元 CAT(1)空間の局所構造を、有限個の CAT(1)-空間リプシッツ円板の貼り合わせとして決定し、これらのリプシッツ円板の交わりから特異点集合を、各点からほぼ放射状に伸びる有限個のリプシッツ曲線の和として特徴づけて行きたい。またこのような２次元 CAT(1)-特異空間の上でガウス・ボンネ定理を確立することも今後の目標となる。
一方で非コンパクト完備な CAT(0)空間の理想境界などに、自己相似集合と呼ばれるフラクタル集合が現れることがよくある。このような自己相似集合の幾何解析を展開するとき、これまでの先行研究では、本質的にユークリッド空間内の自己相似集合を考察することに限定されていた感があった。本研究ではこの点に着目し， ウ・ダルハン氏（当時筑波大学、現在、内蒙古経済大学）との共同研究により、漸近的自己相似集合という新しい概念を導入することで、これまでの“自己相似集合”の概念を一般化し、そのハウルドルフ次元を決定した。

４．研究成果
２次元 CAT(1)空間内の任意の位相的特異点のまわりの微小領域において、位相的特異点集合を囲む形で自然に定義された線識面が、その内部距離に関して CAT(1)空間になることを証明することに成功した。すなわち内部距離をもつ線識面が Alexandrov の考察したパラメータ空間上の誘導距離に等長的であることを証明することができた。この手法の副産物として、線識面が２次元円板に同相であることも従う。この結果は２次元 CAT(1)空間の局所構造を解明する上で鍵となるものであり、これを基にして今後は、２次元 CAT(1)空間の局所構造を、有限個の CAT(1)-リプシッツ円板の貼り合わせとして決定し、特異点集合が局所的には有限個のリプシッツ曲線の和として記述できることを示して行く。

CAT(1)空間の局所構造は、２次元に限っても極めてワイルドであり、その構造の決定は曲率の上からのバウンドの根源的意義を理解する上でも興味深い。CAT(1)空間の局所構造の決定は世界的にも初めてのケースであり、その成功が、A.Litchack 氏（ケルン大学）を始め、世界的にも注目され期待されている。また２次元 CAT(1)空間の局所構造を用いて、このような特異曲面上のガウス・ボンネ型定理や、極小曲面の研究も展開して行きたいと考えている。

・これまでのユークリッド空間における自己相似集合を、曲がった空間内の漸近的自己相似集合の概念に拡張し、そのハウスドルフ次元を決定した。今までの自己相似集合の概念は、自己相似写像により定まるが、そもそも自己相似写像は、ユークリッド空間など、極めて特殊な空間内でしか考察することが困難な対象であり、一般の曲がった空間では存在しえない対象である。そのため、そのような特殊な空間を除いて自己相似集合を考察することが困難な状況であった。本研究では漸近的自己相似写像の無限系列を用いて漸近的自己相似集合の概念を創った。これにより、もっと自由に“自己相似集合”を考察し、そのハウスドルフ次元を決定することができるようになった。例えば具体例として、曲面上に幾何学的に自然にシェルピンスキー・ガスケットを定めるとき、そのハウスドルフ次元を決定した。上で述べたように、これまでの自己相似集合はユークリッド空間以外で定義することが困難な部分があったが、漸近的自己相似集合の利点は一般の曲がった空間（特異空間も含めて）においても、定義し易いのが最大の長所である。今後、この方向でより一般の漸近的自己相似集合のフラクタル幾何が展開されるよう研究を継続していきたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

[1] W. Daruhan; T. Yamaguchi, Hausdorff dimension of asymptotic self-similar sets. *J. Fractal Geom.* 4 (2017), no. 4, 339-368　査読有

[2] A. Mitsuishi and T.Yamaguchi, Collaspsing three-dimensional closed Alexandrov spaces, Trans. AMS. 367(2015), 2339-2410DOI　査読有

〔学会発表〕（計　６件）

1. 山口孝男　境界つきリーマン多様体の崩壊日本数学会年会総合講演，東京大学 2018.3.19 （招待講演）

2. T. Yamaguchi, Fibration Theorem in the theory of Collapsing. Geometry seminar, Tongji Univ Shanghai. 2017.09.04 （招待講演）

3. T. Yamaguchi Collapsing three manifolds Geometry seminar, Tongji Univ Shanghai. 2017.09.05 （招待講演）

4. T. Yamaguchi Comaparison angles and volume, The 7th international workshop on Differential geometry, 唐津市，2017.3.26（招待講演）

5. T.Yamaguchi Inradius collapsed manifolds, Geometric analysis on Riemannian and metric spaces, RIMS, Kyoto University, 2016.9.5（招待講演）

6. T.Yamaguchi Inradius collapsed manifolds, Riemannian Geometry Seminar , MSRI, USA , 2016.2.2（招待講演）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
山口孝男(YAMAGUCHI, Takao)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：00182444

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者

永野　幸一（NAGANO Koichi）

研究者番号：30333777