

令和元年6月21日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13437

研究課題名(和文) Chern-Simons摂動論の完成

研究課題名(英文) Approach to completion of the Chern-Simons perturbation theory

研究代表者

清水 達郎 (Shimizu, Tatsuro)

京都大学・数理解析研究所・特定助教

研究者番号：00738859

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：Chern-Simons摂動論に関わるいくつかの新しい不変量を構築し、それらの間の関係を一部明らかにした。より具体的には、Bott-Cattaneoによる非自明接続のChern-Simons摂動論の誤りを発見し、それを修正した。さらによりフレキシブルな構成に拡張することに成功した。また、そのMorseホモトピー論による新しい解釈を与えた。また、3次元多様体論で重要な不変量であるCasson不変量について、その数学的に新しい理解の足掛かりとなる成果(不足符号数の新しい解釈)を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Chern-Simons摂動論は物理学のChern-Simons量子場の理論を、数学的に近似し記述する手法であり、3次元多様体論(数学の一分野)に多くの知見をもたらす。Chern-Simons量子場の理論は数学的にはまだ正当化されていない。一方、厳格な言語である数学によって記述されたChern-Simons摂動論は人類にとって確固たる数学的知見を与える。本研究ではその記述をより広げたとともに、物理から切り離された純粋な数学的視点からその一部をとらえなおすことに成功した。これらの成果は3次元多様体論のみならず、数学全体においても重要な指導原理・知見を与えうるものである。

研究成果の概要(英文)：I gave several new invariant related to the Chern-Simons perturbation theory and I investigated the relationship between these invariants.

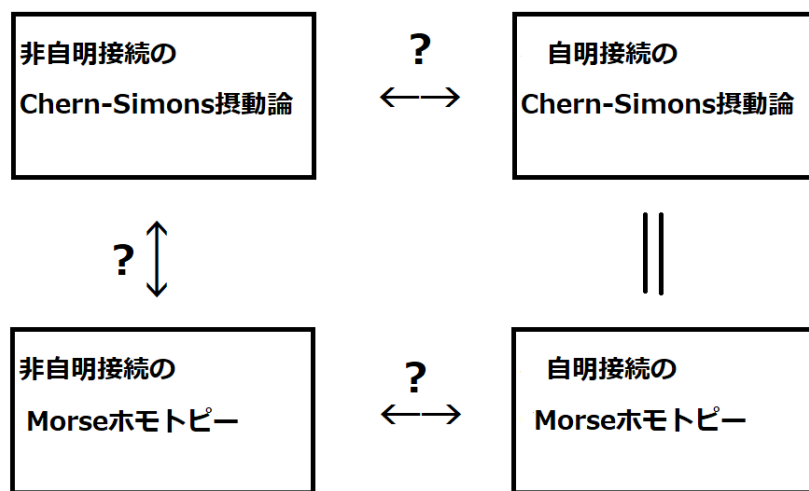
I found a gap on the construction of the Chern-Simons perturbation theoretical invariant given by Bott and Cattaneo. Then I remove the gap and I refined their construction to more flexible one. I also gave a Morse homotopy theoretical description of the invariant. I gave a new description of the signature defect which plays an important role of the Chern-Simons perturbation theoretical description of the Casson invariant.

研究分野：3次元多様体の有限型不変量，特にChern-Simons摂動論

キーワード：Chern-Simons摂動論 量子不変量 配置空間積分 有限型不変量 3次元多様体の不変量

1. 研究開始当初の背景

- (1) Witten は Chern-Simons 場の量子論の分配関数が 3 次元多様体の位相不変量を与えるだろうと提唱した。Witten の提案は物理の範疇であり、いまだ数学的に正当化されていない。Chern-Simons 摂動論は Witten の提唱をいわば数学的に近似して、数学的に正当化された不変量を取り出す手法の一つである。
- (2) Chern-Simons 摂動論は 3 次元多様体とその上の平坦接続とよばれる構造の組に対する不変量を作り出す。取りうる平坦接続としては、自明接続と呼ばれる特別な接続とそれ以外の非自明(平坦)接続の 2 つに大別することができる。
- (3) 自明接続の Chern-Simons 摂動論は Kuperberg, Thurston, Lescop, Taubes らをはじめとする多くの数学者によってよく研究されており、様々な性質が明らかになっている。
- (4) 非自明接続の Chern-Simons 摂動論は Bott, Cattaneo らによってトポロジカルな定義が与えられているが、その性質はほとんどわかっていない。
- (5) Fukaya, Watanabe によって定義された Morse ホモトピー不変量は Chern-Simons 摂動論の亜種といえる不変量で、やはり 3 次元多様体と平坦接続の組に対する不変量を与える。しかし数学的に厳密な定義に成功しているのは自明接続の場合のみである。
- (6) 以上のように、Chern-Simons 摂動論の周辺には不変量が点在しているが、それらの関係はほとんど明らかになっていない。これらの状況をまとめたのが図である。



(図)研究背景の概要図

2. 研究の目的

本研究の目的は、Chern-Simons 摂動論に関わる不変量たちの関係を探ることである。より具体的には、以下のとおりである。

- (1) 非自明接続の Morse ホモトピーを完成させる。
- (2) 図中 4 つの不変量の相互の関係を明らかにする。
- (3) さらに、図中 4 つの不変量すべてを包括するような適用範囲の広い不変量を構成し、それにより Chern-Simons 摂動論に関わる不変量の相互の関係を(2)よりも自然な形で明らかにする。

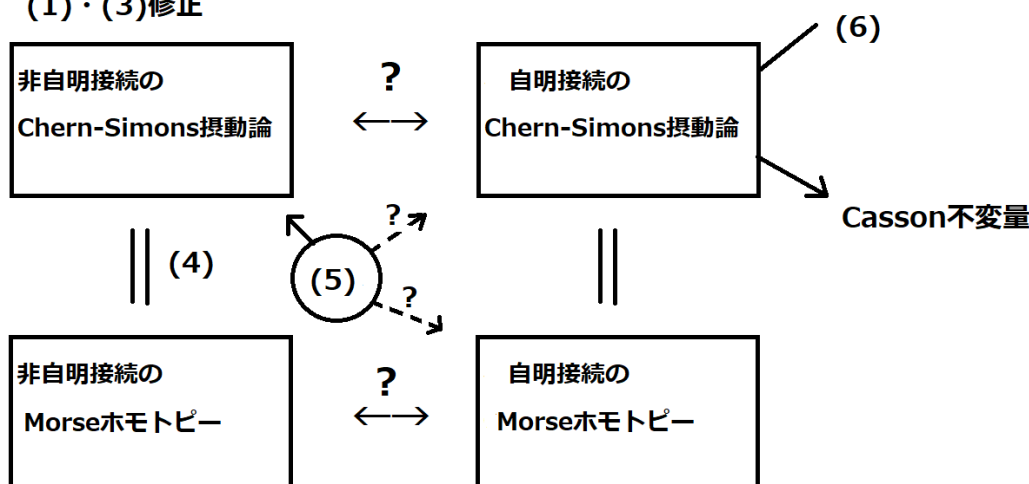
3. 研究の方法

- (1) 非自明接続の Morse ホモトピーを完成させる。Morse ホモトピーは Morse 関数と呼ばれる補助的な情報を用いて値を計算し、最後にその Morse 関数(補助的情報)の選択の曖昧さを打ち消す補正項を加えることで定義される。非自明接続の場合には自明接続の場合よりも補助的情報の選択が与える影響が複雑であるから、これを打ち消すために新しいタイプの補正項を模索する。
- (2) 非自明接続の Chern-Simons 摂動論と非自明接続の Morse ホモトピーの比較を行い、その関係を明らかにする。これには自明接続の場合の Chern-Simons 摂動論と Morse ホモトピーの比較を行った際に研究代表者が開発した手法が少なくとも部分的には適用できると考えている。
- (3) 図中 4 つの不変量を包括するような不変量を構成する。これにより 4 つの不変量の相互関係を明らかにする。
- (4) 自明接続の Chern-Simons 摂動論で得られる基本的な不変量である Casson 不変量の理解を深める。

4. 研究成果

- (1) Bott-Cattaneo による非自明接続の Chern-Simons 摂動論の構成の中に誤り(ギャップ)を発見し,それを「障害類」として定量化した. Bott-Cattaneo による非自明接続の Chern-Simons 摂動論は本研究で調査・比較する 4 つの不変量のうちの 1 つである. 研究代表者はこの不変量について研究している際,その構成中で用いられている補題の証明にギャップがあることを発見した.このギャップを「障害類」(あるいは defect)ともいふべきコホモロジー類として定量化することに成功した.この「障害類」が 0 のときには Bott-Cattaneo による構成は正しい.なお,これらの結果については Cattaneo 氏とも議論し,状況を確認済みである.
- (2) 上記の「障害類」に幾何学的な意味を与えた.具体的には 3次元多様体とその上の Morse 関数の組に対してある種のグラフ複体(注,グラフ複体:グラフの集合が張る線形空間の列とその間の線形写像たちの集まり.)を構成し,そこで現れる唯一の非自明なコサイクルとして特徴づけた.この障害類の類似物が渡邊忠之氏や C.Lescop 氏の研究にも表れており,それらとの関係を調べることは今後の課題である.これらの関係が明らかになれば,非自明接続の Chern-Simons 摂動論と自明接続の Chern-Simons 摂動論との本質的な違いがどこにあるのかが明確になると思われる.
- (3) Chern-Simons 摂動論で用いられる「プロパゲーター」の条件を大幅に緩めることに成功した.これにより, Bott-Cattaneo による非自明接続の Chern-Simons 摂動論を修正することができた.さらに,オリジナルのものよりもフレキシブルな状況で不変量を作ることができるように改良を行った.これらの結果の一部は A.S.Cattaneo 氏(Zurich 大)との共同研究である.
- (4) Chern-Simons 摂動論の中でも数学的に重要な「SU(2)非自明接続の Chern-Simons 摂動論」に対応する Morse ホモトピーを構成した.また,これが(3)で構成した非自明接続の Chern-Simons 摂動論と一致することを示した.この研究により,非自明接続の Chern-Simons 摂動論と非自明接続の Morse ホモトピーの関係が部分的に明らかになった.この関係(対応)を通して双方の不変量の理解・計算が進むことが期待される.
- (5) 研究方法(3)で述べた「4 つの不変量を包括する不変量」を構成するための途中段階といふべき不変量を構成した. Chern-Simons 摂動論の構成はいくつかの道具が用いられるが,その 1 つである「trace map」として従来のもよりもフレキシブルな新しいタイプのもを導入し,それを用いて不変量を作った.ただし,この不変量と 4 つの不変量の間関係は現在研究中の段階にとどまっている.
- (6) Chern-Simons 摂動論の補正項を写像の特異点論という別の数学理論から解釈しなおすことに部分的に成功した.この研究は,研究方法の(4)で述べた Casson 不変量を Chern-Simons 摂動論を経由して解釈することで,その理解を深める研究の途中段階として行った.なお,本研究の副産物として,写像の特異点の間の新たな関係式を複数得ることができた.また,折り目写像と呼ばれるよいクラスの写像を多様体が許容するための新しいタイプの障害を与えることができた. Chern-Simons 摂動論という視点を用いることで,特異点論の内部から自発的には発想しにくい方法で知見が得られたことは意義深い.

(1)・(3)修正



(4)構成

いと考える.

(図) 研究成果の概要図

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

Tatsuro Shimizu, AN ALTERNATIVE CONSTRUCTION OF THE SU(2) CHERN-SIMONS PERTURBATION THEORY, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No.2062, 2018.

Tatsuro Shimizu, A variant of Chern--Simons perturbation theory, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No.1991, 2016.

〔学会発表〕(計10件)

清水達郎, 一般の半単純 Lie 群における Chern-Simons 摂動論について, 研究集会「種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用」, 岐阜県, 2018年8月4日

清水達郎, On the self-intersection of singular sets of maps and the signature defect, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2017年12月12日

清水達郎, On the Bott-Cattaneo's Chern-Simons perturbation theory, Topological invariants in low dimensional topology, 松江テルサ, 2017年10月31日

清水達郎, 写像の特異点集合の自己交差と不足符号数, 日本数学会, 山形大学, 2017年9月13日

清水達郎, On the Bott-Cattaneo's Chern-Simons perturbation theory, Invariants in Low-dimensional Topology, KIAS, 韓国, 2017年5月11日

清水達郎, SU(2)-Chern-Simons 摂動論について, 日本数学会, 首都大学東京, 2017年3月25日

清水達郎, 非自明な接続での Chern-Simons 摂動論と障害, 京都大学微分トポロジーセミナー, 京都大学, 2016年5月10日

清水達郎, 非自明な接続における Chern--Simons 摂動論と Morse homotopy, 日本数学会, 筑波大学, 2016年3月18日

清水達郎, Casson 不変量と3次元多様体の framing, 九州産業大学数学教室セミナー, 2015年11月18日

清水達郎, Graph flow と Chern - Simons 摂動論, 学習院大学トポロジーセミナー, 学習院大学, 2015年6月19日

〔その他〕

プレプリント:

(preprint)Tatsuro Shimizu, On multiframeings of 3--manifolds, preprint, (RIMS preprint 1897(PDF)), 2018

(preprint)Tatsuro Shimizu, On self-intersection of singularity sets of fold maps, preprint (RIMS preprint 1895(PDF)), 2018

(preprint)Tatsuro Shimizu, Morse homotopy for the SU(2)-Chern-Simons perturbation theory(RIMS preprint 1857), 2016

ホームページ:

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~shimizu/>

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。