

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13438

研究課題名(和文)ビッグデータ可視化手法による安定写像構成イノベーションへの挑戦

研究課題名(英文)Innovation challenge to the construction of stable maps by big data visualization techniques

研究代表者

佐伯 修 (SAEKI, OSAMU)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：30201510

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：可微分多様体間のどんな写像も安定写像で近似できるが、その具体的構成は極めて困難である。そこで本研究では、ビッグデータ可視化手法を応用し、新しい手法で組織的に安定写像を構成する手法を確立することが目的であった。

そこで、特異ファイバーの分類を進め、多様体対などの場合に新しい分類結果を得た。それらを同境界理論に応用したほか、データ可視化ユーザーインターフェース開発に用いた。それに触発され、既知の写像を具体的に変形させる新手法も開発し、4次元多様体の研究に応用した。こうして幾何的に重要な安定写像を組織的に構成し、写像の不変量の研究に応用できたほか、写像の単純化定理の新証明手法も成果として得た。

研究成果の概要(英文)：An arbitrary map between differentiable manifolds can be approximated by a stable map; however, it is known that explicit construction of a stable map is extremely difficult. The main objective of this project was to develop a new systematic method to construct stable maps by applying the big data visualization techniques in computer science.

We first obtained classification results of singular fibers of stable maps in various situations, and applied them to cobordism theories. We also used them to develop a user interface for analyzing and visualizing big data. Inspired by such techniques, we succeeded in developing a new method to explicitly construct a deformation of a given map, and applied it to the study of 4-dimensional manifolds. We thus constructed various geometrically important stable maps concretely, and applied them to the study of mapping invariants. We also developed a new method to prove a simplification theorem of stable maps on manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：特異ファイバー 安定写像 可視化 ビッグデータ 写像の構成論 特異点集合 低次元多様体 単純化

1. 研究開始当初の背景

可微分多様体を与えられたとき、その上のジェネリックな写像、特に安定写像は、多様体の種々の幾何学的性質を調べる上で重要な役割を果たす。たとえばモース関数は1次元ユークリッド空間への安定写像であり、豊かなモース理論が構築されている。モース関数の具体的な構成はそれほど難しくなく、ところが値域多様体の次元を2以上とすると、話は途端に非自明となる。与えられた多様体に対し、その対称性や種々の幾何学的構造を反映するような写像を考えると、ほとんどの場合ジェネリックでなくなってしまう。たとえばトラス作用を持つ空間のモーメント写像などがその最たる例である。こうした写像は少し摂動してしまうと急激に位相的性質を変えてしまうのである。

しかしながら、具体的な写像の構成は安定写像論において非常に重要である。たとえば佐伯と山本は、4次元多様体上の安定写像に対する符号数公式を得たが、その証明ではまず符号数とある種の特異ファイバーの個数が定数倍の関係にあることを示し、その定数が+1に等しいことを、安定写像を具体的に構成することにより示した。ただし、その安定写像の構成は3次元空間にはめ込まれた実射影平面に基づいた切り貼り手法によるもので、幾何的に非常に注意深い議論が必要であった。このように、具体的な安定写像を構成する方法として特に確立されたものはなく、状況に応じてアドホックな方法を用いて構成されてきたのである。

一方、ビッグデータ可視化手法の1つとして微分トポロジーによる特徴抽出手法がある。これは最近の可視化テクノロジーのトップ10に入るものとして注目を浴びており、特異ファイバー理論を用いたアルゴリズムも開発されている。驚くべきことに、このアルゴリズムは実データのみならず数学的対象の構造解析に用いることもできる。そこで、そうした手法が安定写像の具体例の構成に援用できるのではないかと考えたのが、本研究課題を始めるきっかけとなった。

2. 研究の目的

以上のような背景のもと、本研究では、これまでない方法、特にコンピュータサイエンスにおけるビッグデータ可視化の手法を本質的に応用することにより、多様体間の安定写像をまったく新しい手法によりシステムティックに構成する方法論を確立すること、そして具体的に構成した安定写像を厳密に検証・論証し、微分トポロジーにおける種々の問題に応用し、安定写像論のイノベーションを推進すること、が目的であった。これは今までになかったまったく新しい手法であり、これにより、安定写像の研究が飛躍的に進展し、微分トポロジーの種々の問題の解決に直結するものと期待される。

3. 研究の方法

安定写像の重要な特徴を把握するには、その特異ファイバーを解析することが重要である。そこでそうした特異ファイバーの分類を、特異点論を駆使して行うことが重要な研究手法の一つとなる。またそうした分類結果を、ユーザーインターフェース開発の際に本質的に用いることで、具体的な写像の特異ファイバー解析や可視化を自動化するためのアルゴリズムを構築する。本研究課題では、そうした手法に加え、与えられた安定写像のある種の具体的な操作で変形してゆくことで、新しい安定写像を構成することも考える。ただし、そうした変形操作はいつでも可能であるとは限らず、適用するにはかなりの数理的注意が必要である。そこで、こうしたいくつかの手法を組み合わせることで、安定写像の構成論を新たに構築していくことが当初の計画であった。

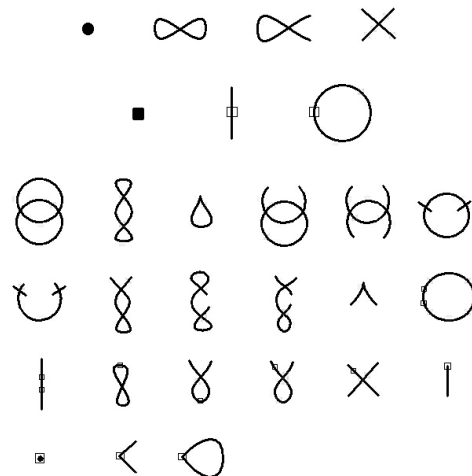
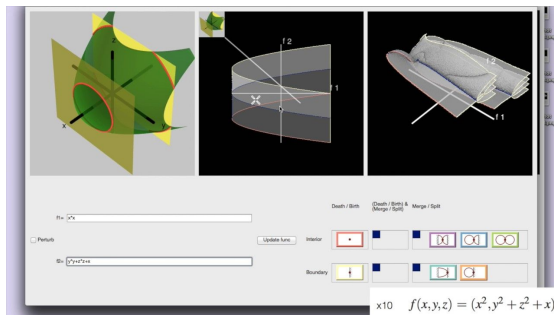


図1：3次元多様体上の安定写像の特異ファイバーリスト

4. 研究成果

(1) まず、境界付き3次元多様体から平面への安定写像の特異ファイバーを、特異点論に基づき分類した(図1参照)。

次に、こうした分類結果を用いて、ビッグデータ可視化のためのユーザーインターフェースを開発した。具体的には、3次元領域から2次元ユークリッド空間への多項式写像を具体的に与えたとき、その特異ファイバーを実際に可視化できるソフトウェアを作成した。これは、ユーザーが、与えられた写像を安定になるように摂動することもできるもので、与えられた写像のふるまいやその特異ファイバーを解析・可視化できるものである。さらにその特異点集合・特異ファイバー・特異値集合も可視化できる(図2参照)。こうしたユーザーインターフェースを、コンピュータサイエンスの研究者の協力により整備できたことは、本研究課題の目的達成のために非常に重要であった。実際、それを試験的に簡単な多項式写像に適用し、そうした



**図2：特異ファイバー可視化
ユーザーインターフェース**

写像の構造の解析を開始することができた。このユーザーインターフェースは、与えられた写像だけではなく、それを摂動した写像の構造も解析できる点に大きな特長があり、これにより、これまで安定摂動の様子が解明されてこなかった高度に退化した写像の安定摂動の解析が進められる目途が立った。

(2) 一方で、3次元境界付き多様体から2次元空間への安定写像の特異ファイバーの普遍複体のコホモロジーを計算することとReebグラフを用いた幾何学的議論により、境界付き曲面上のMorse関数のなす同境界群を決定することに成功した。これまで境界付き多様体に関わる同境界群の研究はなく、それが非自明でなおかつ非常に興味深い対象であることが本研究結果によりわかったことになり、こうした数学的対象の研究の大きな流れを作ったという意味で、インパクトの大きな成果であると言えるものである。

その後、さらに多様体対、特に3次元多様体とその中の2次元部分多様体の対の上の安定写像の特異ファイバーの研究を進め、分類結果を得た。また、対応する普遍複体のコホモロジーを計算することで、ある場合には対応する同境界群が非自明となることを初めて示した。多様体対上の安定写像の研究はこれまでほとんどなく、その特異ファイバーの研究としては世界で初めてとなる分類結果を得たことは特筆に値する。多様体対は応用上非常に重要であり、境界を持つ多様体の一般化にあたる。

(3) 可視化を行うユーザーインターフェース作成には至っていないが、特異ファイバーを曲線に沿ってつなげてできる「ファイバー曲面」の可視化アルゴリズムの研究を行い、コンピュータサイエンスの研究者と共同でその可視化を実装することができた。ただしそれは初期段階の実装であり、それを改良してゆくことは今後の課題である。

(4) その後さらに、3次元多様体から球面や平面への安定写像で、定値折り目特異点を持たないものや、特異点集合と正則ファイバー

の位置関係が特殊な写像の具体例を、これまでにない方法で具体的に構成することに成功した。その手法は、既に具体的に得られている写像をもとに、その変形を具体的に構成するという、今までにないアイデアに基づくもので、今後の安定写像の構成論において重要な役割を果たすことが大いに期待できる。今回はさらに4次元多様体から球面や平面への写像を構成的に単純化・簡単化する手法も開発し、4次元多様体のtrisectionの研究にも応用した。

(5) ビッグデータ可視化を行うユーザーインターフェースについては、特異ファイバーを曲線に沿ってつなげてできるファイバー曲面の可視化アルゴリズムやレーブ空間の可視化手法を研究し、それをを用いてシミュレーションなどで得られる安定写像のビッグデータ可視化を実際に行うソフトウェアを、コンピュータサイエンスの研究者と共同で開発することを開始した。

以上のように、今後まだ研究すべきことが多く生じたとはいえ、安定写像の具体的な構成について、これまでになかった新しい手法を開発することができ、さらにそれをを用いて実際に具体的で幾何学的に重要な安定写像を組織的に構成し、微分トポロジーにおける重要な問題の解決に用いることができた。さらに、そうした手法を支えるユーザーインターフェース開発を実質的に開始することもできた。これらが、本研究課題の大きな成果であったといえる。

今後は、こうした手法により安定写像を豊富に構成することが可能となったことから、安定写像の具体例を種々の重要な未解決問題の解決に用いることができることが大いに期待される。ただし、今回の構成手法が万能というわけではないので、さらに別のアイデアによる安定写像の構成手法を模索することも重要となるであろう。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計15件)

R.I. Baykur and O. Saeki, Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds, to appear in Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 査読有。

O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps of manifold pairs and their applications, “Singularities and Foliations. Geometry, Topology and Applications”, Springer Proc. Math. & Statistics, pp.259-294, vol.222, 2018. 査読有。DOI: 10.1007/978-3-319-73639-6

佐伯修, A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces, 数理解析研究所講究録 2049 (2017), 155-172. 査読無.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2049.html>

O. Saeki, Theory of singular fibers and Reeb spaces for visualization, "Topological Methods in Data Analysis and Visualization IV - Theory, Algorithms, and Applications", H. Carr, C. Garth, T. Weinkauf (Eds.), Proc. Topology-Based Methods in Visualization 2015, pp.3-33, 2017. 査読有.
DOI: 10.1007/978-3-319-44684-4

M. Kobayashi and M. Yamamoto, Views of real projective 3-space by stable maps into the plane, Experimental Mathematics 26 (2017), 138-152. 査読有.
DOI: 10.1080/10586458.2016.1142910

A. Chattopadhyay, H. Carr, D. Duke, Z. Geng, and O. Saeki, Multivariate topology simplification, Comp. Geom. 58 (2016), 1-24. 査読有.
<http://doi.org/10.1016/j.comgeo.2016.05.006>

O. Saeki and T. Yamamoto, Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary, Contemporary Mathematics 675 (2016), 279-297. 査読有.
DOI:
<https://doi.org/10.1090/conm/675>

O. Saeki and T. Yamamoto, Singular fibers of stable maps of 3-manifolds with boundary into surfaces and their applications, Alg. & Geom. Topol. 16 (2016), 1379-1402. 査読有.
DOI: 10.2140/agt.2016.16.1379

D. Sakurai, O. Saeki, H. Carr, Hsiang-Yun Wu, T. Yamamoto, D. Duke, and S. Takahashi, Interactive visualization for singular fibers of functions $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics 22 (2016), 945-954. 査読有.
DOI: 10.1109/TVCG.2015.2467433

[学会発表] (計 5 0 件)

O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations and trisections of

4-manifolds, The 13th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar, Kagoshima Univ., 2018.

O. Saeki, A Vassiliev type invariant of order one for stable maps of 3-manifolds into surfaces, PRIMA 3rd Congress, Singularities of Spaces and Mappings, Oaxaca, Mexico, 2018.

O. Saeki, Introduction to singularity theory and fiber topology in multivariate data analysis, Topology, Computation and Data Analysis, Dagstuhl Seminar 17292, Schloss Dagstuhl - Leibniz Center for Informatics, Germany, 2018.

佐伯修, 安定写像の特異ファイバーとその応用, RIMS-IMI 談話, 京都大学数理解析研究所, 2017.

佐伯修, 微分トポロジーによるデータ可視化, 日本機械学会 2016 年度年次大会, 九州大学伊都キャンパス, 2016.

佐伯修, トポロジーでデータ構造を解析する, 第 10 回設計情報学研究会, KKR ホテル熊本, 2016.

佐伯修, Visualizing Singular Fibers - UI & Impacts -, Joint work with D. Sakurai, H. Carr, Hsiang-Yun Wu, T. Yamamoto, D. Duke, K. Ono, and S. Takahashi, Software in Mathematics Demonstration Track in Hakata Workshop, 2016, IMI 百道オフィス, 福岡市.

佐伯修, 組織構造の斬新な数学的解析手法 ~ トポロジーとその考え方, 第 67 回白石記念講座「新しい世紀の形態計量学 - 数学と鉄鋼研究のコラボレーション - 」, 早稲田大学, 2015.

佐伯修, 安定写像と多様体のトポロジー, 幾何学賞受賞特別講演, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015.

O. Saeki, Singularity theory and data visualization, Geometric Singularity Theory, Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, Banach Center, Warsaw, Poland, 2015.

佐伯修, 組織構造の斬新な数学的解析手法 ~ トポロジーとその考え方, 鉄鋼イ

ンフォマティクス研究会第 6 回研究, 九州大学, 2015 .

O. Saeki, Cobordism group of Morse functions on surfaces with boundary , Brazil-Mexico 2nd Meeting on Singularities - 2015, Federal University of Bahia, Brazil, 2015.

O. Saeki, Topology of singular fibers for visualization, Topology-Based Methods in Visualization 2015, Kurhaus Trifels, Annweiler, Germany, 2015.

[図書] (計 4 件)

R.N. Araujo dos Santos, V.H.J. Perez, O. Saeki and T. Nishimura, School on Real and Complex Singularities in São Carlos, 2012, Adv. Stud. Pure Math., Vol.68, 2016, 373 pages.

V. Blanlœil and O. Saeki, Singularities in Geometry and Topology 2011, Adv. Stud. Pure Math., Vol.66, 2015, 282 pages.

[その他]

ホームページ

<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index-j.html>

<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/index.html>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

佐伯 修 (SAEKI, Osamu)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号 : 3 0 2 0 1 5 1 0

(2) 研究分担者

小林 真人 (KOBAYASHI, Mahito)

秋田大学・理工学研究科・准教授

研究者番号 : 1 0 2 6 1 6 4 5

山本 卓宏 (YAMAMOTO, Takahiro)

東京学芸大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 6 0 4 3 5 9 7 2

(3) 連携研究者

高橋 成雄 (TAKAHASHI, Shigeo)

会津大学・コンピュータ理工学部・教授

研究者番号 : 4 0 2 9 2 6 1 9

(4) 研究協力者

櫻井 大督 (SAKURAI, Daisuke)

Zuse Institute Berlin・研究員