1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４３９
研究課題名（和文）空間の別の空間上の多重度の研究

研究課題名（英文）Multiplicity of a space over another space

研究代表者
谷山　公規（Taniyama, Kouki）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：１０２４７２０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：　マグマ（X、・）に対して整数全体の集合Ｚから X への写像ａが右再帰列であるとは、ａ（ｎ＋２）＝ａ（ｎ）・ａ（ｎ＋１）が全ての整数ｎに対して成立することであるとする。また、ａが左再帰列であるとは、ａ（ｎ＋２）＝ａ（ｎ＋１）・ａ（ｎ）が全ての整数ｎに対して成立することであるとする。例えばマグマ（X、・）を整数全体の集合Ｚが通常の加法に関してなす群（Ｚ、＋）とすれば、右再帰列と左再帰列は一致して、それはフィボナッチ型数列を負数番へ拡張したものである。いろいろなマグマや群やカンドルにおける右再帰列や左再帰列について考察した。また右再帰列や左再帰列がいつ全射になるかについても考察した。

研究成果の概要（英文）：Let $(X,\cdot)$ be a magma. A map $a:{\mathbb Z}\to X$ is a right-recursive sequence if $a(n)\cdot a(n+1)=a(n+2)$ for every $n\in{\mathbb Z}$. A map $a:{\mathbb Z}\to X$ is a left-recursive sequence if $a(n+2)=a(n+1)\cdot a(n)$ for every $n\in{\mathbb Z}$. When $(X,\cdot)=({\mathbb Z},+)$ a right-recursive sequence is a left-recursive sequence and it is a Fibonacci type sequence defined on ${\mathbb Z}$. We study various right-recursive sequences and left-recursive sequences. We also study various surjective right-recursive sequences and left-recursive sequences.

研究分野：幾何学

キーワード：多重度　結び目　空間グラフ

１．研究開始当初の背景

空間の別の空間上の多重度という概念がカテゴリーにおいて定義されていて基本的な性質が示されていた。集合と写像のカテゴリー、位相空間と連続写像のカテゴリー、群と準同型写像のカテゴリー、加群と線形写像のカテゴリー、結び目の近傍カテゴリー、などのカテゴリーについて、いろいろな例といくつかの定理が示されていた。

２．研究の目的

空間の別の空間上の多重度を離散的なものだけでなく連続的なものについて適用する。距離空間の集合におけるいろいろな距離も多重度として定式化可能である。このように考えることで、さらなる例を発見し、また理論を発展・深化させて応用を発見する。

３．研究の方法

カテゴリー論やトポロジーや幾何学や数論などの数学諸分野の論文や本などの文献調査と、これら諸分野の研究者との交流と、手計算および計算機による計算と、フリーハンドやコンピューターグラフィックスによる描画・図示・図解による幾何的考察と、沈思黙考とによって研究する。

４．研究成果

有限グラフを一つ固定する。便宜上その各辺に向きを一つ与えておく。そのグラフの２つの空間埋め込みを考える。これら２つの空間埋め込みがトータリークロースであるということを次のように定義する。それは任意のタイプの交差交換とその２つの空間埋め込みのうちの任意の１つに対して、その与えられたタイプの交差交換１回で残りの１つの空間埋め込みへ移すことが出来るとする。ここで任意のタイプの交差交換とは、グラフの任意の２つまたは１つの辺と、正または負の任意の符号に対して、これらから定まるタイプの交差交換のことである。つまりこれら２つの辺または１つの同じ辺における交差交換で、その符号を正から負に、または負から正に変えるような交差交換のことである。有限グラフで孤立頂点も自由頂点も持たないようなものを考える。このとき、そのグラフのある２つの空間埋め込みでトータリークロースであるものが存在するための必要十分条件は、そのグラフが平面的グラフであり、互いに交わらない２つのサイクルを持たないことであることを示した。証明には、平面的グラフであり、互いに交わらない２つのサイクルを持たないようなグラフの特徴付けと絡み数とサイモン不変量との関係と、グラフの空間埋め込みの像の補空間の含む圧縮不可能曲面に関する議論を用いる。

この問題に関連して、有限グラフの空間埋め込みの全同位類を変えないような交差交換にはどのようなものがあるかについて考察した。この問題は、空間グラフの特定可能射影図に関する予想とも関連がある。

Youngsik Huh 氏（Hanyang University）と Jung Hoon Lee 氏（Chonbuk National University）との共同研究として以下を示した。

空間内の単位球体Ｂ内に適切に埋め込まれたｎ本の互いに交わらない単純弧の和集合をＴとする。このとき対（B，Ｔ）をｎ弦タングルと呼ぶ。ｎ弦タングル（B，Ｔ）がスティックタングルであるとは、Ｔが有限個の直線分の和集合であることとする。このときＴの成分をｔ（１），ｔ（２），・・・，ｔ（ｎ）とし、それぞれａ（１）本，ａ（２）本，・・・，ａ（ｎ）本の直線分からなり、数列ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）は広義単調減少数列であるとする。このとき数列ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）を（B，Ｔ）のオーダーと云うことにして order（B，Ｔ）=ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）と記すことする。広義単調減少整数列ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）が stick-tangle-order-trivial とは、order（B，Ｔ）=ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）である任意のスティックタングル（B，Ｔ）が trivial であることとする。そうでないときに stick-tangle-order-nontrivial と云うことにする。このとき以下の定理を示した。

定理　ａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）を広義単調減少整数列とする。このときａ（１），ａ（２），・・・，ａ（ｎ）が stick-tangle-order-nontrivial であるための必要十分条件は次の１．から５．までのどれかが成立することである。

１．ａ（１）は5以上，
２．ａ（１）＝4，ａ（２）は2以上，
３．ａ（１）＝ａ（２）＝3，
４．ａ（１）＝3，ａ（２）＝ａ（３）＝2，
５．ａ（１）＝ａ（２）＝ａ（３）＝ａ（４）＝2．

市原一裕氏（日本大学文理学部）と鄭仁大氏（近畿大学理工学部）との共同研究として以下を示した。どんなアキラルな３次元多様体内の零ホモロガス結び目の補空間にも同相にならないような、カスプを１つもつアキラルな双曲３次元多様体が無限に存在する。

カンドル（X、＊）に対して、自然数全体の集合ＮからＸへの写像ａが左再帰列であるとは、ａ（ｎ＋２）＝ａ（ｎ＋１）＊ａ（ｎ）が全ての自然数ｎに対して成立することであるとする。　カンドル（X、＊）に対して、

自然数全体の集合ＮからＸへの写像ａが右再帰列であるとは、ａ（ｎ）＊ａ（ｎ＋１）＝ａ（ｎ＋２）が全ての自然数ｎに対して成立することであるとする。

ｍを３以上の自然数とする。２面体カンドル（Ｄ（ｍ）、＊）が全射左再帰列を持つための必要十分条件は、ｍが３のべきであることであることを示した。

Ｄ（ｍ）を正ｍ角形の頂点集合と考えたときに、３点ａ（ｎ）、ａ（ｎ＋１）、ａ（ｎ＋２）は、ａ（ｎ）を対称頂点とする２等辺三角形の頂点集合をなす。このように全てのｎに関して３点ａ（ｎ）、ａ（ｎ＋１）、ａ（ｎ＋２）がａ（ｎ）を対称頂点とする２等辺三角形の頂点集合をなすような頂点列でＤ（ｍ）への全射になるようなものを決定したことになる。

またこの定理のアレクサンダーカンドルやアレクサンダーマグマへの拡張を考えた。特に、全てのｎに関して３点ａ（ｎ）、ａ（ｎ＋１）、ａ（ｎ＋２）がａ（ｎ＋２）を対称頂点とする２等辺三角形の頂点集合をなすような頂点列でＤ（ｍ）への全射になるようなものが存在するための必要十分条件も、ｍが３のべきであることであることを示した。

マグマ（X、・）に対して整数全体の集合ＺからＸへの写像ａが右再帰列であるとは、ａ（ｎ＋２）＝ａ（ｎ）・ａ（ｎ＋１）が全ての整数ｎに対して成立することであるとする。また、ａが左再帰列であるとは、ａ（ｎ＋２）＝ａ（ｎ＋１）・ａ（ｎ）が全ての整数ｎに対して成立することであるとする。マグマ（X、・）が可換であれば右再帰列と左再帰列は一致する。例えばマグマ（X、・）を整数全体の集合Ｚが通常の加法に関してなす群（Ｚ、＋）とすれば、右再帰列と左再帰列は一致して、それはフィボナッチ型数列を負数番へ拡張したものである。

マグマ（X、・）からマグマ（Ｙ、・）へのマグマ準同型写像ｆがあるときに、整数全体の集合ＺからＸへの右再帰列ａとｆの合成は、ＺからＹへの右再帰列となり、ＺからＸへの左再帰列ａとｆの合成は、ＺからＹへの左再帰列となる。また、マグマ（Ｙ、・）がマグマ（X、・）の部分マグマであり、整数全体の集合ＺからＸへの右再帰列ａの像がＹに含まれる場合には、ａはＺからＹへの右再帰列と考えることが出来る。左再帰列についても同様である。

いろいろなマグマや群やカンドルにおける右再帰列や左再帰列について考察した。また右再帰列や左再帰列がいつ全射になるかについて考察した。特に整数全体の集合Ｚの正の整数ｍを法とした合同類全体の集合Ｚ／ｍＺとその元Ａからなるアレクサンダーマグマ（Ｚ／ｍＺ、Ａ）への右再帰列や左再帰列は、巡回列になり、中国剰余定理から全射性がｍの素因数分解に現れる素数を法とした合同類全体の集合上のマグマへの右再帰列や左再帰列の全射性に帰着出来ることを示した。

Theodore Stanford によって与えられた結び目のバシリエフ不変量の基本定理の初等的証明をアレンジして、長結び目を使わない証明方法を考えた。

ｎ個の交差頂点を持つ特異結び目ＫからＫへの交差交換ループＬに対してＬを境界とする特異結び目円板Ｄが存在することを示す。このために先ずＫの極大木Ｔを選び、Ｔ上での交差交換を４項関係式を使ってＴ外での交差交換に置き換える。Ｔのディスクバンド曲面を考えることでＴ上の動きを制御して、Ｔの近傍Ｎでは静止しているようなループＬに取り替える。ここでも４項関係式を使う。３次元球面におけるＮの外部タングルを考えて、外部タングルの射影図の変化を、昇順アルゴリズムを使ってライデマイスターの定理を用いて、４項関係式と１項関係式と微分可能関係式に帰着させた。以上が証明の概略である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

Y. Huh, J. H. Lee and K. Taniyama, Stick number of tangles, J. Knot Theory Ramifications, 26, (2017), 1750094, 9 pp., DOI: 10.1142/S0218216517500948
査読有

N. Ito, S. Matsuzaki and K. Taniyama, Circle arrangements of link projections, Kobe J. Math., 34, (2017), 27-36,
査読有

N. Ito, Y. Takimura and K. Taniyama, Strong and weak $(1,3)$ homotopies on knot projections, Osaka J. Math., 52, (2015), 617-647, 査読有

〔学会発表〕（計４件）

K. Taniyama, Realization of Knots and Links in a Spatial Graph, MAA MathFest 2017, Hilton Chicago

K. Taniyama, Totally close spatial embeddings of a graph, AMS Sectional Meeting AMS Special Session, 2015, Fullerton

谷山公規, Totally close spatial embeddings of a graph, 拡大KOOKセミナー2015、神戸大学百年記念館六甲ホール

谷山公規, Component-specific unknotting

numbers of links，第 88 回米沢数学セミナー，2015，山形大学工学部百周年記念会館

６．研究組織

(1)研究代表者

谷山 公規（Taniyama Kouki）
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：10247207