

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 10 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13440

研究課題名(和文)強磁性イジング模型の未解決領域における振る舞いの解明

研究課題名(英文)On yet-open questions about Ising ferromagnets

研究代表者

坂井 哲 (Sakai, Akira)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：50506996

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：半径 r の d 次元球をプラス境界条件下におき、その中心のスピンの期待値を考える。この1スピン期待値は相転移を示し、臨界温度直上では r でゼロに収束することが知られていた。とくに上部臨界次元である4次元より上では、 r の $1-d/2$ 乗より遅く減衰することが、ハイパースケーリング不等式から厳密に知られていた。

半田氏とHeydenreich氏との共同研究において、確率幾何的表現である「ランダムカレント表示」を用いて2次モーメント法を精密に評価し、臨界1スピン期待値が4次元より上では $1/r$ よりもゆっくり減衰することを厳密に証明した。Newman氏の *festschrift* に掲載されることが決定。

研究成果の概要(英文)：Consider the 1-spin expectation at the center of the d -dimensional ball of radius r under the plus-boundary condition. It has been known that it exhibits a phase transition and decays to zero as r diverges at the critical temperature. In particular, it is known to decay slower than r to the power $1-d/2$ above the upper-critical dimension 4, due to a hyperscaling inequality.

By using the random-current representation, a stochastic-geometric representation for the Ising model, Handa, Heydenreich and I have proven a sharper second-moment estimate and concluded that the critical 1-spin expectation decays no faster than $1/r$ above 4 dimensions, meaning the 1-arm exponent is not bigger than the long-expected mean-field value 1 for $d>4$. The results are summarized in a paper, which was accepted for publication in a *festschrift* for Charles Newman's 70th birthday.

研究分野：確率論，統計力学，数理物理

キーワード：イジング模型 臨界現象 1-arm指数 低温相 確率幾何的表現

1. 研究開始当初の背景

イジング模型 (以下、断らない限り、 d 次元正方格子 Z^d 上の最近接強磁性モデルを扱う) は、磁石の相転移・臨界現象を説明する統計力学モデルとして、20 世紀前半に考案された。Onsager (1944 年) による 2 次元厳密解が非自明な相転移・臨界現象を示すことが分かって以来、精力的に研究される対象となっている。また、その汎用性の高さから、分野を越えて応用されるようになっていて、今日一つのパラダイムを形成している。

この 70 年間、様々な解析方法が編み出され、幾つもの難問が数学的に厳密に解決されてきた。最近では、イジング模型のレース展開が完成し、鏡映正值性と呼ばれる強い対称性を仮定せずとも、高次元 $d > 4$ における臨界現象が平均場的なものに退化することを証明できるようになった。さらに、2 次元イジング模型の臨界点におけるスケールング極限は共形変換に対し不変であることが証明され、Smirnov が 2010 年フィールズ賞を受賞したことも記憶に新しい。

このように高温相 $\beta < \beta_c$ や高温側から近づいた臨界点 β_c 近傍、或いは極低温領域 $\beta > \beta_c$ での振る舞いは相当理解が進んできたが、低温相、特に臨界点近傍では未解決問題が多い。例えば、半径 r の d 次元球をプラス・スピンの海 (つまり地磁気のような環境、プラス境界条件と呼ばれる) に置いたとき、中心にあるスピンの期待値 $M(\beta, r)$ は現実問題としても重要な物理量だと考えられるが、それが β や r の関数としてどのように振る舞うのかは未知の部分が多い。特に臨界点 β_c 直上における $r \rightarrow \infty$ の振る舞いは、次元のみに依って決まる 1-arm 指数 ρ によって $M(\beta_c, r) \approx r^\rho$ ($d=2$ では $\rho=1/8$, $d>4$ では $\rho=1$) と予想されているが、未だに解決されていない。

2. 研究の目的

上述の背景を踏まえ、以下の 2 つの課題を解決することが目標である。

- 課題 (1): $M(\beta, r)$ の $r \rightarrow \infty$ 極限における自発磁化への収束の様子を明らかにする。特に臨界点以外の β では収束の速さが指数関数的である一方、臨界点 β_c 直上では冪的に減衰し、その冪指数 (1-arm 指数) ρ が高次元においては 1 に退化するという予想が正しいことを証明する。
- 課題 (2): 低温相において帯磁率 (= プラス境界条件下の 2 スピン共分散の和) が収束することを証明する。その際、従来の 2 スピン共分散の減衰の仕方を解析する方法 (スラブ・パーコレーションによる近似) に依らない、もっと直接的な方法を考案し、将来の低温相における微分不等式やレース展開の研究に繋がる契機としたい。

3. 研究の方法

これまでよく使われてきたクラスター展開は、例えば低温相の場合、絶対零度の基底

状態 (イジング模型では、全員プラス・スピンが全員マイナス・スピンという状態) から少し温度が上がったときに現れる小さなクラスター (基底状態と反対向きのスピンの塊り) を展開因子とする摂動法で、極低温領域では上手く行くとしても、臨界点にナイーブに近づくことができない。実際、一般の次元 $d > 2$ では、クラスター展開は臨界点近傍で収束しない。この事情は高温側でも同じで、高温展開のようなクラスター展開 (超高温で揃い始めるスピンの塊りを展開因子とする摂動法) も臨界点近傍では収束しない。

そこで登場したのが、Griffiths 達 (1970 年) により考案され、Aizenman (1982 年) によってその有用性が再発見された「ランダムカレント表示」である。これは、組み合わせ論とグラフ理論を用いて、高温展開を精密化したものである。この精密化によって、臨界点近傍の非摂動領域を解析できるようになり、ついには 2007 年にレース展開が完成、高次元ながらも臨界点直上の 2 点関数が漸近的に自由であることを証明できるまでに至った。最近の発展としては、Aizenman 達 (2014 年) がランダムカレント表示から無限体積測度を構成することに成功し、一般の次元 $d > 2$ で自発磁化が β の連続関数になっていることを証明したことが挙げられる。

本研究でも、このランダムカレント表示を適用した。これにより、上述の 2 つの課題に関する物理量は、それぞれ「パーコレーション」と呼ばれる確率幾何モデルの或る統計量に翻訳できる。パーコレーションの (超) 臨界相は或る程度理解が進んでいるという事実を踏まえ、イジング模型でも確率幾何学的なアプローチを試みた。

4. 研究成果

課題 (1): ランダムカレント表示により、 $M(\beta, r)$ は「半径 r の d 次元球の中心から伸びたクラスターが系の境界に達するパーコレーション事象に関する量」と解釈することができる。これに、イジング模型特有の組み合わせ等式である「源泉移し替え等式」を応用すると、比較的簡単に (しかも、目指していた「直接的な方法」で) 高温相 $\beta < \beta_c$ における $M(\beta, r)$ の r に関する指数関数的減衰を導くことができた。

続いて臨界点直上における $M(\beta_c, r)$ の解析に移ったが、これが非常に難しい問題であった。当初の予定であった、パーコレーションにおける類似の問題を解くために考案された Kozma-Nachmias の論法が上手く行かない。(この方向は現在も検討中であり、今年の 9 月に共同研究者である Markus Heydenreich 氏 (ドイツ) を訪問する予定である。) そこで 1-arm 指数の値を求めるのを一旦諦め、片側不等式の証明にゴールを設定した。パーコレーションの 1-arm 指数が高次元で 2 に退化することは知られていたため、イジング模型の 1-arm 指数が高次元で 1 以下であることさえ

示すことができれば、二つのモデルが異なる普遍性クラスに属することを証明できることになる。

片側不等式を証明するための論法として、Paley-Zygmund 不等式を用いた「2 次モーメント法」がある。そこで、この方法を適用しようと試みるが、それでも上手く行かない。全ての問題は、 $M(\beta_c, r)$ が有限体積で定義された並進対称性のない物理量だからである。かなり長い期間、様々な試行錯誤を繰り返した結果、非一様磁場を上手くデザインして印加しておいて、最後に磁場を消散させる極限を取ることによって、非自明な相関不等式を導くことができた。この相関不等式には、パーコレーションにおける類似の相関不等式と決定的に異なるファクターが入っており、そのせいで $\rho > 2$ (パーコレーション) ではなく、求めたかった $\rho = 1$ を得ることに成功した。さらにこの結果は、これまで知られていたハイパースケーリング不等式による上界 $\rho \leq d/2 - 1$ を遥かに改善したものになっている。半田悟氏 (北大) と Heydenreich 氏との共著が完成し、Newman 氏の 70 歳を記念した festschrift (査読有) に受理され、掲載されることが決定している。

残る 1-arm 指数の逆向き不等式を求めることや、低温相における $M(\beta, r)$ の自発磁化への収束の速さを求めることは期間中にはできなかったが、現在も半田氏、Heydenreich 氏との共同研究が進行中である。

課題 (2): ランダムカレント表示により、プラス境界条件下における 2 スピン共分散は「その 2 点を同時に含むクラスターが境界に接しないパーコレーション事象に関する量」として解釈することができる。課題 (1) の物理量とは異なり、「クラスターが大きくなればより起き易くなる」という単調性がないのが難しいところである。(これが、低温相におけるレース展開が未完成である理由の一つである。)

当初は、この問題にも相当時間と労力を割いていたが 2015 年夏に発表された Aizenman と Duminil-Copin のプレプリントの中で完全に解かれてしまったことで中断してしまった。ところが、この論文には重大な欠陥があることが分かり、のちに arXiv から抹消されることになった。我々としては、研究のモーメントを一旦失ってしまったため、すぐに再開することができないでいた。すると、別の確率幾何的表現である「ランダムクラスター表現」を用いて、鏡映正值性を仮定しなければならぬという制約つきながら、臨界点以外での 2 スピン共分散の指数関数的減衰が証明されてしまった (Duminil-Copin 達による)。現在の我々は、鏡映正值性を仮定しない、ランダムカレント表示を用いてより直接的に、臨界点以外での 2 スピン共分散の指数関数的減衰を導出できないか検討中で、半田氏との共同研究が継続中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

Akira Sakai, Hyperscaling for oriented percolation in $1 + 1$ space-time dimensions, Journal of Statistical Physics, 査読有, Vol. 171, Issue 3, 2018, 462—469,

<https://doi.org/10.1007/s10955-018-2020-2>.

Toshihiro Arae, Shiori Isai, Akira Sakai, Katsuhiko Mineta, Masami Yokota Hirai, Yuya Suzuki, Shigehiko Kanaya, Junji Yamaguchi, Satoshi Naito, Yukako Chiba, Co-ordinated regulations of mRNA synthesis and decay during cold acclimation in Arabidopsis cells, Plant & Cell Physiology, 査読有, Vol. 58, Issue 6, 2017, 1090—1102, <https://doi.org/10.1093/pcp/pcx059>.

[学会発表] (計 20 件)

Akira Sakai, Hyperscaling for oriented percolation in $1+1$ space-time dimensions, NUS Probability Seminar, 2018 年 2 月 12 日, National University of Singapore (シンガポール)

Akira Sakai, Hyperscaling for oriented percolation in $1+1$ space-time dimensions, NTU Math Colloquium, 2017 年 11 月 27 日, National Taiwan University (台湾)

坂井 哲, 強磁性イジング模型の相転移・臨界現象に関する研究の最近の動向, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 2017 年 9 月 11 ~ 14 日, 山形大学 (山形市)

坂井 哲, 有向パーコレーションの臨界現象: 厳密な立場より, Summer School 数理物理 2017, 2017 年 8 月 25 ~ 27 日, 東京大学 (目黒区)

坂井 哲, The lace expansion for self-avoiding walk and percolation on the BCC lattice, 阪大確率論セミナー, 2017 年 7 月 18 日, 大阪大学 (豊中市)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for high-dimensional Ising ferromagnets, Physical and Mathematical Approaches to Interacting Particle Systems – In Honor of 70th Birthday of Herbert Spohn, 2017 年 1 月 11 ~ 12 日, 東京工業大学 (目黒区)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, 3rd Workshop on Probability Theory and its Applications, 2016 年 12 月 13 ~ 16 日, Korea Institute for Advanced Study (韓国)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, 2016 TMS Annual Meeting, 2016 年 12 月 11 ~ 12 日, National Dong Hwa University (台湾)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, 15th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2016年11月2~4日, 東京大学(目黒区)

坂井 哲, The lace expansion for the nearest-neighbor models on the BCC lattice, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会, 2016年9月15~18日, 関西大学(吹田市)

坂井 哲, Rigorous analysis of critical behavior for statistical-mechanical models of polymers, 北海道高分子若手研究会, 2016年9月2~3日, 定山溪ビューホテル(札幌市)

Akira Sakai, The lace expansion for the nearest-neighbor models on the BCC lattice, The BIRS Workshop "Random Structures in High Dimensions", 2016年6月26日~7月1日, Casa Matemática Oaxaca(メキシコ)

Akira Sakai, Self-avoiding walk on random conductors, The IMI Workshop "Mathematical Quantum Field Theory and Related Topics", 2016年6月6~8日, 九州大学(福岡市)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, International Conference on Probability Theory and Statistical Physics, 2016年3月25~27日, NYU Shanghai(中国)

Akira Sakai, Self-avoiding walk on random conductors, NCU Probability Seminar, 2016年3月11日, National Central University(台湾)

Akira Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, 2016 Spring Probability Workshop, 2016年3月7~9日, Academia Sinica(台湾)

Akira Sakai, Self-avoiding walk on random conductors, NZ Probability Workshop 2016, 2016年1月3~9日, Scenic Hotel Bay of Islands(ニュージーランド)

Akira Sakai, Critical points for self-avoiding walk on random conductors, Summer School on Dirichlet Form and Stochastic Analysis, 2015年8月24~28日, 関西大学(吹田市)

Akira Sakai, Critical two-point function for the ϕ^4 model in high dimensions, IMS Workshop on Stochastic Processes in Random Media, 2015年5月4~15日, The Institute for Mathematical Sciences(シンガポール)

Akira Sakai, Critical two-point function for the ϕ^4 model in high dimensions, 九州確率論セミナー, 2015年4月24日, 九州大学(福岡市)

〔図書〕(計1件)

Satoshi Handa, Markus Heydenreich, Akira

Sakai, Mean-field bound on the 1-arm exponent for Ising ferromagnets in high dimensions, To appear in a festschrift for Charles Newman's 70th birthday, 査読有, Vladas Sidoravicius 編, 分担執筆.

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

坂井 哲(SAKAI, Akira)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 50506996

(2)研究分担者

()

研究者番号:

(3)連携研究者

()

研究者番号:

(4)研究協力者

()