

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 16 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13441

研究課題名(和文) 新たなタイヒミュラー空間の構成とその解析

研究課題名(英文) Toward the construction of a new kind of Teichmueller space and its analysis

研究代表者

須川 敏幸 (SUGAWA, Toshiyuki)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：30235858

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：2N個の辺からなる平面上の多角形の辺をN個のペアに組み分けし、各ペアを複素アフィン写像により貼り合わせるによりリーマン面を構成することができる。このとき、自然にそのリーマン面上のアフィン構造も定まるが、このようにして現れる対象を記述するようなタイヒミュラー空間上のベクトル束を構成した。さらにそれは、固定された(カスプ付き)リーマン面の基本群のアフィン表現のなす空間とみなせることがわかった。ここで、ペアをなす2辺が同じ長さを持つ場合は(特異)ユークリッド構造を持つが、上記束の部分集合をなすことから、対応するモジュライ空間があるこの束の切断として実現されると期待される。

研究成果の概要(英文)：One can assign N pairs of sides to a polygon with 2N sides in the plane. Pasting each pair of sides by a complex affine map yields a Riemann surface with affine structure. Our purpose was to construct a suitable vector bundle over the Teichmueller space which describes those Riemann surfaces arising from this construction. It turns out that it is equivalent to consider the space of affine representations of the fundamental group of a fixed Riemann surface with punctures. Moreover, if the sides have the same length for each pair in the above construction, one obtains a singular Euclidean structure for the Riemann surface. Therefore, we understand that a moduli space of such objects can be understood as a section of the above vector bundle.

研究分野：複素解析

キーワード：タイヒミュラー空間 アフィン構造 錐特異性 双曲計量 特異ユークリッド構造

1. 研究開始当初の背景

双曲計量はリーマン面が持つ最も重要な不変量と言ってもよく、コンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間は基点となる面上の双曲計量の全体をイソトピーで割ったものと定義される。近年はいくつかの点において錐特異性を許すような双曲計量が種々の動機から研究されるようになってきた。各特異点において錐角を固定すれば、そのような双曲計量全体をイソトピーで割ったものが対応するタイヒミュラー空間であると期待されるが、実際にそのような空間を実現するような枠組みがなければ、このような記述は絵に描いた餅のようなものであり、実用性があまりない。錐角が 2 の自然数分の 1 であれば、捩れ元を含むフックス群の擬等角変形として 1970 年代から知られてきたが、一般の場合に対応する群がもはや離散的でなくなるため困難であり、それに替わるモデルが必要とされる。

2. 研究の目的

本研究では、多角形の辺を複素アフィン写像で貼り合わせて得られるリーマン面および付随するアフィン構造を梘子にそのようなタイヒミュラー空間のモデルを構成しようというアイデアを基礎とする。実際、もし貼り合わせる 2 辺がもともと同じ長さを持つ複素アフィン写像としては実際には (ユークリッド) 合同変換を選ぶことができ、したがって多角形上のユークリッド計量がリーマン面上に特異ユークリッド構造を誘導する。ここで“特異”と言ったのは、多角形の頂点に対応する点においては錐角に対応する多角形の頂点の内角の和になるため、それは一般には 2 とは限らず、錐特異性が表れるからである。複素平面上の多角形上には自然に大域的な座標が入っているが、複素アフィン写像で辺を貼り合わせて得られるリーマン面には自然にアフィン座標系が定まることになる。したがって、多角形の貼り合わせによって得られたリーマン面には、リーマン面の構造だけでなく、このようなアフィン構造が備わっていると考えるべきであり、このようにして得られるアフィン構造を自然に包含するようなタイヒミュラー空間またはその上のアフィン束を構成すれば、それが新しいタイプのタイヒミュラー空間の候補となりうる。このような研究は近年研究が盛んになってきている Veech 曲面や特異ユークリッド構造などとも密接に関係するはずで、可能であればそれらとの関係も明らかにしたい。

また、錐角が一般の場合にはリーマン面の基本群のある種の非離散表現が必要となる。実際、研究代表者がかつて小森洋平氏と共同で行った研究において 1 点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の Bers 埋め込みをコ

ンピュータで計算するための方法を与えたが、実はその方法は錐角が 2 の自然数分の 1 という形でなくても、それらしい描画ができることが数値実験によってわかっていた。これがいったい何に対応するのかを明らかにするためのヒントをこの研究から得たい。

3. 研究の方法

研究のアイデアは素朴である。「背景」でも述べたように、錐角を固定した錐特異性を持つ双曲計量や特異ユークリッド構造の全体は基点となる面の (通常の) タイヒミュラー空間と位相的には同じと期待される。そこで、タイヒミュラー空間上で適当なアフィン束 (あるいは、実質的にはベクトル束) を考え、その上の適当な切断 (セクション) としてタイヒミュラー空間を実現しようというものである。そのためにはまず候補となる束を見つける必要がある。

また、双曲計量の詳細な考察も必要となる。かつての学生で現在、蘇州大学で教員を務める張坦然氏は学位論文において錐特異性を持つ双曲計量の漸近挙動を詳細に調べた。彼女を研究協力者としてリーマン球面上の双曲計量について詳細な研究を行うことが研究のヒントとなると期待される。そのほか、この方面の専門家とも情報交換しつつ正しい研究の方向を目指した。

4. 研究成果

(1) 上記の束の構成においてヒントとなるのが、先に述べた多角形を貼り合わせて得られるリーマン面および付随するアフィン構造である。アフィン構造から、自然にリーマン面上の正則 1 形式 (アーベル微分) が定まるが、問題は特異点における特異性の度合いである。特異点においてたかだか 1 位の極を持つようなアーベル微分の空間をファイバーに持つようなベクトル束を考えるとうまくことがわかった。この空間において、与えられた錐角を持つ特異双曲構造や特異ユークリッド構造を持つ部分の特定には至っていないが、これらのモジュライを記述するために有力な候補となると期待される。なお、本結果の一部については 2017 年東北大における下記研究発表において報告済みであるが、まだ論文の形にまではまとまっていない。最終年度には宮地秀樹氏 (大阪大) と議論し、アフィン表現の空間を考えることが鍵になることが分かった。今後はこの方向でさらに研究をすすめたい。

(2) 関係する研究として、張坦然氏および Matti Vuorinen 氏 (Turku 大学, フィンランド) と共同でリーマン球面から有限個の点を除いたリーマン面の双曲距離を近似する距離関数を具体的に定義し、双曲距離との比較定数の具体的評価を行った。その比較定数にはシストール (最短測地線) の長さが関与するが、それをその有限個の点 (境界点) の複

比によって数値的に定義される量により具体的に評価することを行った。これはシートの長さの評価として独立した価値を持つと思われる。

(3) 固定された錐角を持つ特異双曲計量や特異ユークリッド計量の本モジュライ空間は、その特性から複素解析的な構造を持つとは期待されない。というのも、このような構造を“複素的に”変形すると自然に対数螺旋が現れることが経験的に分かっているからである。王利梅氏(对外経済貿易大学, 中国)との共同研究で螺旋状と呼ばれる単葉函数族について研究を行い、対数螺旋についての理解を深めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5件)

(以下、すべて査読有り)

Tanran Zhang and T. Sugawa, Construction of nearly hyperbolic distance on punctured spheres, to appear in Bull. Math. Sci., doi: 10.1007/s13373-017-0111-z

T. Sugawa, A construction of trivial Beltrami coefficients, to appear in Proc. Amer. Math. Soc., doi: 10.1090/proc/13965

Li-Mei Wang and T. Sugawa, Geometric properties of the shifted hypergeometric functions, Complex Analysis and Operator Theory 11 (2017), 1879-1893, doi: 10.1007/s11785-017-0674-4

Li-Mei Wang and T. Sugawa, Spirallikeness of shifted hypergeometric functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 42 (2017), 963-977, doi: 10.5186/aasfm.2017.4257,

T. Sugawa, Spherical convexity and hyperbolic metric, J. Analysis 24 (2016), 167-175, doi: 10.1007/s41478-016-0013-6

[学会発表](計 13件)

(以下、すべて発表者は須川本人)

双曲計量による領域の凸性の特徴づけ(王利梅氏との共同研究), 2017.09.11 山形大学; 日本数学会秋季総合分科会函数論分科会

超幾何函数の幾何的性質について, 2017.09.11 山形大学; 日本数学会秋季総合分科会函数論分科会

Hyperbolic-type distance on punctured spheres, 2017.07.10 Maria CurieSkłodowska University, Lublin, Poland; CMFT 2017

Convexity of domains and its characterization with respect to various metrics, 2017.06.28 University of Hong Kong, Hong Kong; 25th ICFIDCAA

An application of the Loewner theory to trivial Beltrami coefficients, 2017.06.08 Holon Institute of Technology,

Israel; Complex and Harmonic Analysis III

An application of the Loewner theory to trivial Beltrami coefficients, 2017.03.19 Huaqiao University, Xiamen, China; Conference on harmonic mappings and quasiconformal mappings

Polygonal construction of Riemann surfaces and Teichmüller spaces, 2017.01.08 東北大学片平さくらホール; 「リーマン面・不連続群論」研究集会

On the modulus of the exterior of a quadrangle, 2016.08.26 Tohoku University; Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions

Spirallikeness of hypergeometric functions, 2016.06.24 Stoilov Institute, Bucharest, Romania; 14th Romanian-Finnish Seminar

シュワルツ微分の幾何と解析(企画特別講演) 2016.03.16 筑波大学, 日本数学会

Hyperbolic-type distance on punctured spheres, 2015.08.24 Kyushu Sangyo University, Fukuoka; 23rd ICFIDCAA

Hornich operations and related function spaces, 2015.08.10 Kyungpook National University, Korea; Operator Theory and Its Applications

Uniform perfectness and convexity in spherical geometry, 2015.05.17 University of Cincinnati, USA; Modern Aspects of Complex Geometry

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

須川 敏幸 (SUGAWA, Toshiyuki)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：30235858

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

張 坦然 (Tanran Zhang) 蘇州大学

王 利梅 (Li-Mei Wang) 对外經濟貿易大学