

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：12701

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2016

課題番号：15K13443

研究課題名(和文) 複雑ネットワーク上の確率及び量子モデルの統一的理論の構築に向けて

研究課題名(英文) Towards the construction of a unified theory of stochastic and quantum models on complex networks

研究代表者

今野 紀雄 (KONNO, Norio)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：80205575

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：種々の量子ウォークの定常測度、時間平均極限測度について研究を行った。例えば、1欠陥をもつ1次元3状態の量子ウォークに関して、その定常測度を求めた。その結果より、欠陥のない1次元3状態量子ウォークの定常測度を導出し、その定常測度と時間平均極限測度の関係についても明らかにした。また、1欠陥をもつ1次元2相系の量子ウォークに関して、同様の結果を得た。さらに、四元数量子ウォークを導入し、それに対応するグラフのゼータ関数を用いて、グラフ上の四元数量子ウォークを決めるユニタリ行列の固有値を求めることが出来た。そのことにより、量子ウォークと四元数量子ウォークとの違いを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We studied stationary measures and time-averaged limit measures for various quantum walks. For examples, we obtained stationary measures of three-state quantum walk with one defect on the line. By using this result, we got a stationary measure of the three-state quantum walk without defect and clarified relation between stationary measure and time-averaged limit measure. And we obtained a similar result for one-dimensional two-phase quantum walk with one defect. Moreover we introduced the quaternionic quantum walk and got eigenvalues of the unitary matrix determines the quaternionic quantum walk on graphs by the corresponding graph zeta function. From this result, we clarified difference between quantum walk and quaternionic quantum walk.

研究分野：確率論

キーワード：量子ウォーク 定常測度 四元数 ゼータ関数 周期

### 1. 研究開始当初の背景

グラフ(複雑ネットワーク)上の古典モデル(無限粒子系)と量子モデル(量子ウォーク)との解析を相互の構造的類似性に着目し、それぞれのモデルの性質を明らかにする研究は限られていた。

### 2. 研究の目的

上記のような背景のもとで、グラフとして複雑ネットワークを考え、その上のモデルとして、古典モデルとしては確率セルオートマトン、量子モデルとしては量子ウォークという具体的なモデルを対象とし、それらの解析を相互の構造的類似性に着目しつつ行うことを目的とする。

### 3. 研究の方法

種々のグラフ上の量子ウォークについて、古典系のランダムウォークの性質を用い、或いは、類似性や違いについて考察しつつ、量子ウォークの定常測度、時間平均極限測度、弱収束極限測度を、フーリエ解析、組合せ論的手法、母関数、CGMV法を用いて求め、それらの相互の関係を明らかにする。さらに、四元数量子ウォークまで拡張することにより、量子ウォークの構造を深く理解する。

### 4. 研究成果

種々の量子ウォークについて、その定常測度、時間平均極限測度などの研究を行った。

以下具体的な内容を記す。

1 欠陥をもつ 1 次元 3 状態の量子ウォークに関して、既に他の研究者により得られていた導出の修正をすることで、さらに広いクラスの定常測度を求めることが出来た。その結果より、欠陥のない 1 次元 3 状態量子ウォークの定常測度を導出し、その定常測度と時間平均極限測度の関係についても明らかにした。その後、3 状態を 2 状態の解析に落とし込む新しい手法を開発することにより、種々の 3 状態量子ウォークの定常測度を求めることに成功した。その中には、数学的な解析が難しいと信じられていた 1 次元 3 状態フーリエウォークも含まれている。特に、空間的に周期性を持つ今までにないタイプの定常測度を求めることが出来た。さらにその結果をサイクル上の 3 状態量子ウォークに適用し、同様に空間的に周期性を持つ新しいタイプの定常測度を求めることが可能となった。さらにごく最近、1 次元系で多欠陥が有限領域に存在するモデルのあるクラスの定常測度を導出することにも成功した。

1 次元系で 2 相系 1 欠陥をもつ量子ウォークの解析は非常に煩雑であるが、我々はその困難さを克服することにより、その極限定理を求めることに成功した。その後、1 次元系 2 相系のモデルの定常測度の導出にも成功している。また 2 次元系のモデルの解析も行っている。これら結果は、トポロジカル絶縁体などへの応用が強く期待される。

Wojcik モデルと呼ばれる、1 次元系で 1 欠陥をもつ量子ウォークの中では比較的良く研究がされているモデルに対して、時間平均極限測度と弱収束極限定理を得ることが出来た。そのことにより、既に求められていた定常測度との比較を行うことが可能となった。

一様測度が 1 次元のアダマールウォークの定常測度になることは良く知られた事実であるが、固有値問題を解くことにより、遠方で場所に関して 2 次のオーダーで大きくなる定常測度を求めることが出来た。この結果は、アダマールウォークを含むクラスにも拡張可能である。さらに最近では、フーリエ解析の手法により、 $d$  次元格子上的グローヴァーウォークの定常振幅を具体的に求めることが出来た。興味深いのは、この定常振幅の台は有限なので、 $d$  次元トーラス上のグローヴァーウォークの定常振幅も同時に導出出来たことになっている。また、この結果より、 $d$  次元格子及び  $d$  次元トーラス上のグローヴァーウォークの定常測度も求められた。高次元系の量子ウォークの一様測度以外の定常測度は今まで知られていなかったが、今回の我々の結果によりはじめて求めることが可能となった。

サイクル上のアダマールウォークの周期を円分多項式と組合せ論的な手法を用いることで、全ての総頂点数について、周期がないことも含め求めることが出来た。特に、総頂点数が奇数の場合には周期を持たないことを組合せ論的な手法を主に用い示せ、その結果と円分多項式の性質を組み合わせ導出した証明方法が興味深い。さらに、サイクル上の量子コインが場所に依存している量子ウォークのあるクラスに対しても、その周期について解析を行った。

有限グラフ上の 2-tessellabe staggered 量子ウォークを定めるユニタリ行列の固有値をグラフゼータの手法を用いることにより、具体的に求めることが出来た。今後、2-tessellabe staggered 量子ウォークの挙動を詳細に解析したい。また、一般的な  $n$ -tessellabe staggered 量子ウォークに関しても、同様の研究を行いたい。

量子ウォークを定めるユニタリ行列の成分は複素数であるが、それを四元数に拡張した四元数量子ウォークを特に 1 次元系について提案した。さらに、1 次元系を一般のグラフまで拡張した四元数量子ウォークに関して、その右固有値を求める簡易な手法を見つけた。そして、それを用いることにより、具体的に四元数量子ウォークの右固有値と固有ベクトルを求めることに成功した。その結果より、通常の量子ウォークとの比較を行うことが可能となった。今後の課題としては、四元数を拡張した数のクラスに対して、どこまで従来の手法が適用できるのか、また、そのモデルの挙動の特徴は何なのかを明らかにすることがあり得る。

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 17 件)

Norio Konno, Yuki Shimizu and Masato Takei, Periodicity for the Hadamard Walk on cycles, *Interdisciplinary Information Sciences*, 査読有, Vol.23, No.1, pp.1-8 (2017).  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23\\_2017.A.01/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23_2017.A.01/_article)

Norio Konno, Hideo Mitsuhashi and Iwao Sato, The discrete-time quaternionic quantum walk and the second weighted zeta function on a graph, *Interdisciplinary Information Sciences*, 査読有, Vol.23, No.1, pp.9-17 (2017).  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23\\_2017.A.02/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23_2017.A.02/_article)

Takako Endo, Hikari Kawai and Norio Konno, The stationary measure for diagonal quantum walk with one defect, *Interdisciplinary Information Sciences*, 査読有, Vol.23, No.1, pp.57-64 (2017).  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23\\_2017.A.08/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23_2017.A.08/_article)

Yusuke Higuchi, Norio Konno, Iwao Sato and Etsuo Segawa, Periodicity of the discrete-time quantum walk on a finite graph, 査読有, Vol.23, No.1, pp. 75-86 (2017).  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23\\_2017.A.10/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/23/1/23_2017.A.10/_article)

今野 紀雄, 量子ウォークの数理, 数学, 査読有, 69 卷 1 号, pp.70-90 (2017).

Toshiyuki Arai, Choon-Lin Ho, Yusuke Ide and Norio Konno, Periodicity for space-inhomogeneous quantum walks on the cycle, *Yokohama Mathematical Journal*, 査読有, Vol.62, pp.39-50 (2016).

Norio Konno, Iwao Sato and Etsuo Segawa, the spectra of the unitary matrix of a 2-tessellable staggered quantum walk on a graph, *Yokohama Mathematical Journal*, 査読有, Vol.62, pp. 51-87 (2016).

Norio Konno, Hideo Mitsuhashi and Iwao Sato, The quaternionic second weighted zeta function of a graph and the Study determinant, *Linear Algebra and its Applications*, 査読有, Vol.510, pp.92-109 (2016).  
DOI:10.1007/s11128-015-1205-8

Norio Konno, Hideo Mitsuhashi and Iwao Sato, The discrete-time quaternionic quantum walk on a graph, *Quantum Information Processing*, 査読有,

Vol.15, No.2, pp.651-673(2016).  
DOI:10.1007/s11128-015-1205-8

Shimpei Endo, Takako Endo, Norio Konno, Etsuo Segawa and Masato Takei, Weak limit theorem of a two-phase quantum walk with one defect, *Interdisciplinary Information Sciences*, 査読有, Vol.22, No.1, pp.17-29 (2016).  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/advpub/0/advpub\\_2016.R.01/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/iis/advpub/0/advpub_2016.R.01/_article)

Takako Endo, Hikari Kawai and Norio Konno, Stationary measures for the three-state Grover walk with one defect in one dimension, 数理解析研究所講究録 2010, 査読無, pp.45-55 (2016).

Norio Konno, Quaternionic quantum walks, *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 査読有, Vol.2, No.1, pp.63-76 (2015).  
DOI:10.1007/s40509-015-0035-9

Shimpei Endo, Takako Endo, Norio Konno, Etsuo Segawa and Masato Takei, Limit theorems of a two-phase quantum walk with one defect, *Quantum Information and Computation*, 査読有, Vol.15, No.15&16, pp.1373-1396 (2015).  
<http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v15n1516>

Takuya Machida, C. M. Chandrashekar, Norio Konno and Thomas Busch, Limit distributions for different forms of four-state quantum walks on a two-dimensional lattice, *Quantum Information and Computation*, 査読有, Vol.15 No.13&14, pp.1248-1258 (2015).  
<http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v15n1314>

Norio Konno and Masato Takei, The non-uniform stationary measure for discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Information and Computation*, 査読有, Vol.15, No.11&12, pp.1060-1075 (2015).  
<http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v15n1112>

Takako Endo and Norio Konno, The time-averaged limit measure of the Wojcik model, *Quantum Information and Computation*, 査読有, Vol.15, No.1&2, pp.105-133 (2015).  
<http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v15n12>

Takako Endo and Norio Konno, Weak convergence of the Wojcik model, *Yokohama Mathematical Journal*, 査読有,

Vol.61, pp.87-111 (2015).

〔学会発表〕(計4件)

Norio Konno 「The Fourier walk on the integer lattice」, 12th Sendai Workshop on Non-commutative Stochastic Analysis and Applications, 2016年10月17日, 東北大学大学院 情報科学研究科(宮城県仙台市)

Norio Konno 「Stationary and limit measures of quantum walks」, Mini-Workshop on IDAQP, 2016年9月10日, Chungbuk National University チュンブク国立大学(清州市, 韓国)

Norio Konno 「Quaternionic quantum walks」, 11th Sendai Workshop on Non-commutative Stochastic Analysis and Applications, 2015年10月27日, 東北大学大学院 情報科学研究科(宮城県仙台市)

Norio Konno 「Stationarity and periodicity for space-inhomogeneous quantum walks in one dimension」, 10th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2015年7月30日, Chungbuk National University チュンブク国立大学(清州市, 韓国)

〔図書〕(計1件)

今野紀雄、森北出版, 四元数、2016年、140頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野 紀雄 (KONNO NORIO)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号: 80205575