

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13444

研究課題名(和文)面積保存系のカオス領域の構造の研究

研究課題名(英文)The structure of chaotic regions for area-preserving maps

研究代表者

宍倉 光広 (Shishikura, Mitsuhiro)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：70192606

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：2次元の面積保存写像の研究のための第一歩として、Marti Peteと共同で、1次元標準写像(アーノルド族) $z \rightarrow z + \sin(2z)$ (ここで μ は実数)について、相空間変数 z とパラメータ μ を複素化して考えた。主に非線型性パラメータ μ を小さな正の実数として固定したときに、パラメータ μ の空間に指状のパターンが出現することが以前から知られていた。この現象を放物型分岐の理論を用いることにより研究した。

また、実2次多項式族におけるカオス的パラメータの測度が正であること(Jakobsonの定理)の複素二次多項式の Yoccoz puzzle を用いて証明する方法を与えた。

研究成果の概要(英文)：As a first step toward the study of area preserving 2-dimensional maps, jointly with D. Marti Pete, we studied 1-dimensional standard maps (Arnold family) $z \rightarrow z + \sin(2z)$ with complex phase variable z and complex parameters μ . When real positive μ is fixed and z is taken as the main parameter, finger-like structures have been observed near rational μ in the parameter space. We used the theory of parabolic bifurcation to analyze this structure. The translation parameter in the Fatou coordinate is a new control parameter in which finger-like structure become a simple horizontal strip structure and this explains the fingers.

We also studied the family of real quadratic polynomials and introduced a new approach using Yoccoz puzzles to show that chaotic parameters have positive measure (Jakobson's theorem). This method together with complex analytic method to estimate the modulus of certain annuli gave a quantitative estimate of the parameter measure.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 カオス 分岐 フラクタル

1. 研究開始当初の背景

時間発展の数学的モデルを研究する力学系の理論は、個々の力学系の軌道や不変集合の構造を研究すると共に、力学系を変化させたときの挙動の変化（構造安定性や分岐）について研究するものである。非常に良く研究されている積分可能系や双曲型力学系などを除くと、力学系の研究はそれが簡単な式で定義されているものであっても、様々な困難に直面する。

低次元力学系、特に実および複素 1 次元力学系は非常に詳しい研究が可能になる数少ない例を与えている。双曲型力学系の範囲の外では、全く新しい手法の開発が必要となり、特に複素解析的手法は、実および複素 1 次元力学系で大きな成功を収めた。しかし、2 次元以上の力学系（ここでは微分方程式ではなく時間が離散的な写像の反復合成で定義される力学系について考える）では、未だに力学系の空間の全体像がはっきりとはつかめておらず、個々の力学系の相空間の様子については、未解決の問題が山積している。例えば、2 次元の力学系に限っても、実 1 次元力学系では 2 次多項式などの単純なパラメータ族では分岐が単調に起きることが知られているが、滑らかな実 2 次元力学系では、Kan と Yorke らにより、どのようなパラメータ族をとっても、（複雑な分岐が一旦起きれば）その分岐は単調ではない、すなわち、系の構造が複雑になるような分岐と簡単になるような分岐が互いに入り組みながら起きることが知られている。

実 1 次元力学系（例えば、2 次多項式族）の問題に戻ると、パラメータ空間においては、安定な周期軌道をもちほとんどすべての初期値から出発した軌道がこの周期軌道に収束する双曲的パラメータと、安定な周期軌道をもたず、いろいろな軌道が統計的にある絶対連続不変測度に従って分布するカオス的パラメータが混在している。

Jakobson の定理は、カオス的パラメータの集合の測度が正であることを主張するものである。しかし、この測度自体の具体的な評価は難しく、Luzzatto-Takahashi による定理では、10 の -5000 乗というオーダーの評価が得られている。2 次元の多項式自己同形である Henon 写像族に対しては、Benedicks-Carleson により、やはりある種のカオス的パラメータ（ストレンジアトラクタをもつパラメータ）の集合が正の測度をもつという結果が得られているが、これは写像が非常に小さいヤコビアンをもつ（すなわち面積を強く縮小し 1 次元写像に近い）場合に限る結果である。

今後のカオス的研究における重要な問題の一つとしては、この結果を高次元化する方向と共に、2 次元の面積保存系で何らかのカオス的挙動をもつ（例えば正のリャプノフ指数をもつ）パラメータの測度が正か

という問題が挙げられる。同時にそのようなパラメータ集合の測度を具体的な値として評価することも問題となる。

2. 研究の目的

一で述べたような力学系研究の問題意識を受けて、低次元の力学系の族において、パラメータを変化させたときの分岐現象を研究することは非常に重要な問題であり、特に力学系がカオス的な挙動を示すようなパラメータの割合がどのくらいあるか、そしてその集合がどのような構造をもつかを研究していく。

Jakobson の定理や Benedicks-Carleson の定理の証明では、再帰的な特異点やそれに類する点の挙動について、相空間とパラメータ空間が相互に絡み合うことによって発生する構造の解析や、非常に複雑な評価を行うことが必要になる。その複雑さ故に、具体的なパラメータ測度については、（実際には比較的大きな値であると予想されているにもかかわらず）Luzzatto-Takahashi に 10 の -5000 乗というようなひょうかしかえられないことになる。本研究では、このような評価の方法を見直し、より簡明な方法でカオス的パラメータの測度を評価する方法を与えることを目標とし、それを用いて面積保存系の研究につなげていくこと期待する。

また、本研究の方法は複素解析的写像に関する Yoccoz puzzle および parapuzzle の手法をカオス的パラメータの研究のために使うことを想定しているので、複素力学系の相空間の分割の構成と、パラメータ空間の解析のための手法を確立する必要があり、特に相空間での外射線やヘアと呼ばれる集合がパラメータと共にどのように形状を変えるかという分岐現象の研究を行う必要がある。

これらの手法を準備した上で、2 次元面積保存系への適応可能性を見極めていく。

3. 研究の方法

本研究では、いくつかの具体的な低次元力学系で複素解析的拡張を持つものについて、相空間・パラメータ空間を複素化し、複素力学系の理論を適用することにより、力学系がカオス的挙動を示すパラメータ集合の構造やその測度を研究することを目指す。例えば 1 変数二次多項式に関しては、既に相空間の Yoccoz puzzle 分割および、パラメータ空間の parapuzzle 分割の理論が確立されている。その基礎として二次多項式に関する Douady-Hubbard の理論は充填ジュリア集合の補集合（の吸引鉢）での Boettcher 座標に注目し、それを用いてパラメータ空間の Mandelbrot 集合の補集合の Riemann 写像を構成していた。この結果からの帰結として、実 2 次多項式族のエントロピーやニーディング不変量の単調性

が導かれていた。一方、従来の Jakobson の定理の証明では、臨界値の軌道に沿って写像が指数的に拡大している場合に、その近傍のパラメータでは分岐が単調になることを導き、それを用いてパラメータ空間の構造を相空間の構造に基づいて解析していた。Douady-Hubbard 理論および Yoccoz puzzle, parapuzzle の理論は、この部分を代替出来ると期待される。

本研究では、まず二次多項式写像に関する Jakobson の定理の証明を puzzle, parapuzzle を用いた形で定式化することを目標とする。

次に、2次元面積保存系の典型である標準写像族についての研究を勧めるための第一歩として、その1次元類似である1次元標準写像族 (Arnold 族) $z \rightarrow z + \frac{1}{2} + \sin(2z)$ (ここで $z, \frac{1}{2}$ は実数) について考え、それを複素化して、相空間変数 z とパラメータ μ を複素数として、この族の分岐現象を研究する。特に μ を固定したときの主パラメータ z に関する分岐は実力学系としては研究されているが、それを複素に拡張して調べる。そして、複素相空間内で、Yoccoz puzzle の類似を定義し、それを用いて parapuzzle の類似を定義出来るか検討する。そこから、Jakobson 型定理を証明できるかどうかを考える。

2次元標準写像については、その非線型性パラメータが大きい場合に相空間のほとんどの部分では拡大性が強くなり、一次元的 puzzle 構造が横断的方向にも拡張されることが期待される。

4. 研究成果

まず、実二次多項式のカオス的パラメータ集合に関する Jakobson の定理の別証明として、相空間の Yoccoz puzzle 分割および、パラメータ空間の parapuzzle 分割を用いた手法を与えた。厳密には、実パラメータのうちルベグ測度に絶対連続かつ有限な不変測度をもつものの集合が正であることを示した。この手法では、複素二次多項式対する Douady-Hubbard 理論がパラメータ族の単調性を導き、相空間の臨界値を含む(良い)puzzle と、対応するパラメータ空間内のパラメータ値を含む(良い)parapuzzle の対応を用いて、臨界点が自分自身の近くに帰り、くりこみ可能に近くなる(従って吸引的周期点をもつ可能性のある)パラメータ集合を除外していき、残る集合が求める集合となるが、除外される集合との傾集合の比率を parapuzzle の円環領域としてもモデュラスを(それは対応する相空間の puzzle のモデュラスを通じて)用いて評価した。

また、2次元の面積保存写像の研究のための第一歩として、Marti Pete 氏と共同で、1次元標準写像(アーノルド族) $z \rightarrow z + \frac{1}{2} + \sin(2z)$ (ここで $z, \frac{1}{2}$ は実数)

について研究した。本研究では、相空間変数 z とパラメータ μ を複素化して考え、非線型性パラメータ μ を小さな正の実数として固定して、主パラメータ z の空間での分岐集合を考察した。特に主要な放物型パラメータの周りに分岐集合が「指」状のパターンをもつことが以前から知られていたが、これについて、放物型不動点の分岐の理論、特に Fatou 座標を用いた解析を行い、それが生成される原理を解明した。そのためには、撰動された放物型不動点の周りで再帰写像を定義し、それを撰動前の Fatou 座標と結びつけることにより、新しい分岐パラメータ(Ecalle 円筒上の平行移動に対応する)を導入した。指状集合はこの新しい座標によれば、平行な帯状領域になり、指が有限個であること、その個数の大まかな評価が与えられることを発見した。また、複素力学系の相空間とパラメータ端野空間の対応では、正則運動(holomorphic motion)の理論を用い、対応関係が擬等角写像で与えられることが多いが、本研究の一環として、擬等角写像の微分可能性やヘルダー評価に関する研究も行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- (1) Mitsuhiro Shishikura, Conformality of quasiconformal mappings at a point, revisited, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 掲載予定 2018

[学会発表] (計 14 件)

- (1) Mitsuhiro Shishikura, Toward arithmetic surgery of rational maps, Celebrating 25 years of low-dimensional dynamics at Stony Brook, Stony Brook University, May 08, 2015
- (2) Mitsuhiro Shishikura, Smoothness of hairs for some entire functions, AMS-EMS-SPM International Meeting in Portugal, University of Porto, June 10, 2015
- (3) Mitsuhiro Shishikura, Rempe model and Denjoy odometer for hedgehogs of complex quadratic polynomials, School and Conference on Dynamical Systems, Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, August 4, 2018
- (4) Mitsuhiro Shishikura, Rempe model and Denjoy odometer for hedgehogs

- of complex quadratic polynomials, Dynamical Developments: a conference in Complex Dynamics and Teichmüller theory, Jacobs University, Bremen, August 21, 2015
- (5) Mitsuhiro Shishikura, Complex Dynamics and Teichmüller spaces, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Application, 九州産業大学 August 27, 2018
- (6) Mitsuhiro Shishikura, Rempe model and Denjoy odometer for hedgehogs of complex quadratic polynomials, Conference of Complex Analysis in China 2015, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, October 12, 2015
- (7) Mitsuhiro Shishikura, Fractal nature of Julia sets, First Hong-Kong/Kyoto Workshop on Fractal and related areas, The Hong Kong University of Science and Technology, March 21, 2016
- (8) Mitsuhiro Shishikura, Tropical Complex Dynamics, Taking the Measure of One-Dimensional Dynamics, Lorentz Center, Leiden, Netherlands, April 12, 2016
- (9) Mitsuhiro Shishikura, Tropical Complex Dynamics, Mexican-American Workshop in Holomorphic Dynamics, Fiesta Americana Condesa hotel in Cancún, México, June 2, 2016
- (10) Mitsuhiro Shishikura, Tropical limit of complex dynamical systems, Casa Matematica Oaxaca, Mexico, September 20, 2016
- (11) Mitsuhiro Shishikura, Realization problem for tropical complex dynamics, Workshop "Complex Dynamics: Iterations, Foliations and Evolutions", Center for Advanced Study, Norwegian Academy of Science and Letters, Oslo, Norway, June 20, 2017
- (12) Mitsuhiro Shishikura, Fingers in complex Arnold family, Workshop on New Frontiers in Complex Dynamics: From One to Several Variables, The Fields Institute, The University of Toronto, July 20, 2017
- (13) Mitsuhiro Shishikura, Matings and Thurston obstruction, Complex dynamics and quasi-conformal geometry, October 23, 2017
- (14) Mitsuhiro Shishikura, Jakobson's Theorem via Yoccoz puzzles, On geometric complexity of Julia sets, International Conference Center in Będlewo, Poland, March 21, 2018
- 〔図書〕（計 0 件）
- 〔産業財産権〕
- 出願状況（計 0 件）
- 名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：
- 取得状況（計 0 件）
- 名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：
 国内外の別：
- 〔その他〕
 ホームページ等
6. 研究組織
 (1) 研究代表者
 宍倉 光広 (SHISHIKURA, Mitsuhiro)
 京都大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：70192606