

令和元年6月17日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13451

研究課題名(和文) 集合値摂動項を持つ非線形偏微分方程式の研究

研究課題名(英文) Study on nonlinear partial differential equations with set-valued perturbations

研究代表者

大谷 光春 (Otani, Mitsuharu)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：30119656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：N-次元ユークリッド空間の有界領域において、斉次ディリクレ型境界条件下で、次の方程式： $du/dt - u + (u) + G(x,t,u) = f(x,t)$  に対する初期値問題、時間周期問の解の存在について研究した。ここで、 $(u)$  は(多価)単調作用素、摂動項  $G(x,t,u)$  は連続性の集合値関数への拡張概念である、上半連続性(usc)及び下半連続性(lsc)を有する集合値関数。G が集合値関数の時には、超一次増大度条件下でも、対応する結果は存在しなかった。本研究では、一気に G が一価の場合の最良な結果を、集合値関数の場合に拡張することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多価写像に関する解析学は、位相数学、測度論、非線形関数解析、応用数学などのいろいろな数学分野が交錯する興味深い分野の一つである。集合値写像の数学的重要性は、20世紀初頭に既に認識されはじめ、Hausdorff, Vietoris, Hahn, Kuratowski などの多くの数学者によって研究されてきた。これ等の成果は、常微分方程式論(ODE)に引き継がれ、1960年代から、精力的に研究が進められ、膨大な知見が蓄積されてきた。一方で偏微分方程式論に於いては、殆ど研究されてはこなかった。本研究は、ODEで蓄積されてきた知見を偏微分方程式論に移植する本格的な試みであり、その意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：We studied the existence of solutions of the initial value problem and the time periodic problem for the following semilinear parabolic equations:  $du/dt - u + (u) + G(x,t,u) = f(x,t)$  with the homogeneous Dirichlet boundary condition. Here  $(u)$  is a (multi-valued) monotone operator and the perturbation term  $G(x,t,u)$  is an upper semi-continuous or lower semi-continuous set-valued function, which is a generalized notion of continuous function. When G is a set-valued function, there was no results even for super-linear cases. In our study, we succeeded in generalize the best result for the case where G is single-valued to the case where G is a set-valued function.

研究分野：非線形関数解析

キーワード：集合値関数 非線形偏微分方程式 劣微分作用素 非線形発展方程式

## 1. 研究開始当初の背景

【物理的背景】相転移現象は物理学にとって極めて日常的な現象でありかつ重要な研究対象である。即ち、ある物理量（多くの場合は温度）の閾値を境に現象を支配する物理法則が変化するために、他の物理量の不連続性が生じる。（数学的な表現をすれば、物理量をあらかず関数の多価性が現れる。）この意味で、多価性を持つ項が現れる偏微分方程式の数学的な取り扱い、物理学的視点からも重要な課題であり、数学的解析が待たれている。

【数学的背景】多価写像に関する解析学(Multivalued Analysis)は、位相数学、測度論、非線形関数解析、応用数学などのいろいろな数学分野が交錯する興味深い分野の一つである。

集合値写像の数学的重要性は、20世紀初頭に既に認識されはじめ、Hausdorff, Vietoris, Hahn, Kuratowski などの多くの数学者によって研究されてきた。

このような経緯は、常微分方程式論(ODE)に引き継がれ、1960年代から、制御理論や数理経済学に於ける要請から組織的かつ精力的に（特に欧州を中心に）研究が進められ、膨大な知見が蓄積されてきた。今や、多価写像（集合値写像）を含む ODE 理論は成熟の域に達し、社会科学や生命科学へその応用範囲を拡大しつつある。

## 2. 研究の目的

20世紀初頭に始まった多価写像に関する解析学の系譜を引き継ぎ、常微分方程式論(ODE)の分野では集合値写像に関する研究が1960年代から盛んに開始され、現在では、集合値関数を含む ODE 理論は成熟の域に達しその応用範囲を広げつつある。

一方、偏微分方程式の分野では、多価写像を含む方程式に関する研究は、単発的になされて来たものの、ODE 分野のような組織的・包括的な研究はなされてこなかった。

本研究の目的は、集合値をとる非線形項を含む非線形偏微分方程式の理論構築を志向し、ODE 分野で蓄積されてきた膨大な知見を非線形偏微分方程式論に移植するとともに、具体的なモデル方程式に対する解析を通して、理論構築に必要となるであろう基盤的知見を探索することにある。

## 3. 研究の方法

本研究の実行には、多価写像に関する基礎理論と非線形偏微分方程式論にまたがる広範な知識が必要となるので、集合値項を含む ODE 理論のエキスパートである Staicu 教授のグループと非線形偏微分方程式論を専門とする申請者のグループとが協力して研究を進める。

研究協力者として、赤木剛朗（神戸大、現東北大）と石渡通徳（大阪大）を加え、それぞれ、抽象発展方程式論的手法及び実解析的手法からのアプローチを担当する。

さらに、大谷研究室の大学院生を研究協力者として加え、劣微分作用素的手法からのアプローチを担当する。

## 4. 研究成果

(I) 初期値境界値問題に関する成果：

N-次元ユークリッド空間の有界領域  $\Omega$  において、次の半線形放物型方程式の初期値・斉次ディリクレ境界値問題： $du/dt - \Delta u + G(x,t,u) = f(x,t)$ ,  $u(x,0) = u_0$  の解の存在について研究した。ここで、 $G(x,t,u)$  は（多価）単調作用素、摂動項  $G(x,t,u)$  は一価関数の連続性に集合値関数への拡張概念である、上半連続性(usc)及び下半連続性(lsc)を有する集合値関数。

$G(x,t,u)$  が通常の一価関数である時には、 $G(x,t,u)$  の  $u$  に関するソボレフ劣臨界増大条件のもとで、時間局所解の一意存在定理がよく知られているが、 $G$  が集合値関数の時には、 $G$  の  $u$  に関するソボレフ劣臨界増大度はもとより、少しでも一次を超える増大度条件の下でも、対応する結果は存在しなかった。本研究では、一気に  $G$  が一価の場合の最良な結果を、集合値関数の場合に拡張することに成功した。

本研究ではさらに (1)「 $G(x,t,u)$  が  $G(x,t,u)$  より優位である時には時間大域解の存在し」(2)「 $G(x,t,u)$  が  $G(x,t,u)$  より優位な時でも、初期値が十分小さければ、時間大域解が存在する」ことも示した。

$X$  を  $x(0,T)$  上の二乗可積分空間とし、 $X$  の元  $h$  に対して、 $du/dt - \Delta u + G(x,t,u) + h = f(x,t)$ ,  $u(x,0) = u_0$  の解を  $u_h$  とするとき多価写像  $\Gamma : h \rightarrow G(x,t,u_h)$  に対して、Kakutani-Ky Fan の不動点定理や Tolstonogov の selection 定理を経由したシャウダー型の不動点定理を  $\Gamma$  に適用する事により時間局所解を構成した。

(II) 時間周期問題に対する成果：

N-次元ユークリッド空間の有界領域  $\Omega$  において、次の半線形放物型方程式の斉次ディリクレ境界値問題に対する時間周期問題： $du/dt - \Delta u + G(x,t,u) = f(x,t)$ ,  $u(x,0) = u(x,T)$  の解の存在について研究した。ここで、 $G(x,t,u)$  は（多価）単調作用素、摂動項  $G(x,t,u)$  は上半連続性(usc)及び下半連続性(lsc)を有する集合値関数。

$G(x,t,u)$  が通常の一価関数である時には、 $G(x,t,u)$  の  $u$  に関するソボレフ劣臨界増大条件のもとで、外力  $f(x,t)$  が十分小さい時に、時間周期解の存在定理がよく知られているが、 $G$  が集合値関数の時には、 $G$  の  $u$  に関するソボレフ劣臨界増大度はもとより、一次以上の増大度条件

の下でも,対応する結果は存在しなかった.本研究では,一気に  $G$  が一価の場合の最良な結果を,集合値関数の場合に拡張することに成功した.

本研究では

(1)「 $(u)$  が  $G(x,t,u)$  より優位である時には,大きな外力  $f(x,t)$  に対して時間周期解が存在し」

(2)「 $G(x,t,u)$  が  $(u)$  より優位な時でも,外力  $f(x,t)$  が十分小さければ,時間周期解が存在する」ことを示した.

$X$  を  $x(0,T)$  上の二乗可積分空間とし, $X$  の元  $h$  に対して, $du/dt - u + (u) + h = f(x,t)$ ,  $u(x,0) = u(x,T)$  の解を  $u_h$  とするとき多価写像  $\gamma : h \rightarrow G(x,t,u_h)$  に対して,Kakutani-Ky Fan の不動点定理や Tolstonogov の selection 定理を経由したシャウダー型の不動点定理を  $\gamma$  に適用する事により時間周期解の存在を構成した.

上記の成果を得るにあたって,従来の研究では成し得なかった「 $G(x,t,u)$  の  $u$  に関する,各点に関する上半連続性や下半連続性から,多価写像  $\gamma$  の無限次元ヒルベルト空間の位相に関する上半連続性や下半連続性を導出する手法」を確立したことが大きなブレイクスルーとなった.この手法は,他の非線形偏微分方程式へ応用可能であり,本研究で得られた成果の更なる応用が期待される.

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 15 件)

(1) K. Kita and M. Otani; Bounds for global solutions of a reaction diffusion system with the Robin boundary conditions. *Differ. Equ. Appl.* Vol.11, No. 2 (2019), pp.227-242. Doi:10.7153/dea-2019-11-09. (査読有)

(2) T. Kuroda and M. Otani; Local well-posedness of the complex Ginzburg-Landau equation in bounded domains, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol.45 (2019), pp.877-894. Doi:10.1016/j.nonrwa.2018.08.006 (査読有)

(3) M. Otani, L -エネルギー法とその非線形偏微分方程式への応用, 日本数学会雑誌「数学」論説 2019年1月 冬季号, pp. 55-76. (査読有)

(4) K. Kita and M. Otani and Sakamoto, Hiroki; On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, *Adv. Math. Sci. Appl.* Vol.27, No. 2 (2018), pp.193-224. (査読有)

(5) T. Kuroda and M. Otani; Initial-boundary value problems for complex Ginzburg-Landau equations governed by p-Laplacian in general domains, *Libertas Mathematica (new series)*, Vol.38, No. 2 (2018), pp.67-104. Doi:10.14510/2Flm-ns.v0i0.1414 (査読有)

(6) M.A. Efendiev, M. Otani and H. J. Eberl; Analysis of a PDE model of the swelling of mitochondria accounting for spatial movement, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol.41, No. 5 (2018), pp.2162-2177. Doi:10.1002/mma.4742 (査読有)

(7) M. Otani and S. Uchida; Existence of time periodic solution to some double-diffusive convection system in the whole space domain, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Vol.20, No. 3 (2018), pp.1035-1058. Doi:10.1007/s00021-017-0354-1 (査読有)

(8) E. Minchev and M. Otani; L -energy method for a parabolic system with convection and hysteresis effect, *Communications on Pure and Applied Analysis*, Vol.17, No. 4 (2018), pp.1613-1632. Doi:10.3934/cpaa.2018077 (査読有)

(9) M.A. Efendiev, M. Otani and H. J. Eberl; Mathematical analysis of an In Vivo model of mitochondrial swelling, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, Vol. 37, No. 7 (2017), pp.4131-4158. Doi:10.3934/dcds.2017176 (査読有)

(10) T. Kuroda, M. Otani and S. Shimizu; Initial-boundary value problems for complex Ginzburg-Landau equations in general domains, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Vol. 26 (2017), pp.119-141. (査読有)

(11) M. Otani and S. Uchida; Global solvability for double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equation in general domains, *Osaka J. Math.* Vol.53, No. 3 (2016), pp.855-872. (査読有)

(12) M. Otani and S. Uchida; Attractors for autonomous double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, Vol.39, No. 12 (2016), pp.3328-3349. Doi: 10.1002/mma.3776 (査読有)

(13) T. Koyama, M. Otani and Y. Yamauchi; On a regularity theorem in rectangular domains, *Libertas Mathematica (new series)*, Vol.36, No.1 (2016), pp.1-18. Doi:10.14510/2Flm-ns.v0i0.1334 (査読有)

(14) S. Eisenhofer, M. A. Efendiev, M. Otani, S. Schulz and H. Zischka; On an ODE-PDE model of the mitochondrial swelling process, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, Vol.20, No. 4 (2015), pp.1031-1057. Doi:10.3934/dcdsb.2015.20.1031 (査読有)

(15) M. A. Efendiev, M. Otani and H. J. Eberl; A coupled PDE/ODE model of mitochondrial

swelling: Large-time behavior of homogeneous Dirichlet problem, Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics, Vol.3, No.2 (2015), pp.1-13.  
Doi:10.1166/jcsmd.2015.1070 ( 査読有 )

[ 学会発表 ] ( 計 22 件 )

- (1) 香川 溪一郎, 大谷 光春; Asymptotic limits of the viscous Cahn-Hilliard equation, 2019年3月20日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於東京工業大学理学部 )
- (2) 喜多 航佑, 大谷 光春; On the comparison theorem for parabolic equations governed by nonlinear boundary conditions, 2019年3月20日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於東京工業大学理学部 )
- (3) 黒田 隆徳, 大谷 光春; Finite time blow-up for a complex Ginzburg-Landau equation with linear term, 2019年3月20日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於東京工業大学理学部 )
- (4) 香川 溪一郎, 大谷 光春; Initial boundary value problem of the viscous Cahn-Hilliard equation, 2018年9月27日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於岡山大学理学部 )
- (5) 喜多 航佑, 大谷 光春; Bounds for global solutions of a reaction diffusion system, 2018年9月27日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於岡山大学理学部 )
- (6) 黒田 隆徳, 大谷 光春; Periodic solutions for complex Ginzburg-Landau equations in bounded domains, 2018年9月27日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於岡山大学理学部 )
- (7) K. Kagawa and M. Otani; On the existence of the global solutions of the viscous Cahn-Hilliard equation, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5-July 9, 2018 Taipei, Taiwan.
- (8) K. Kita and M. Otani; On some parabolic system arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5-July 9, 2018 Taipei, Taiwan.
- (9) T. Kuroda and M. Otani; Global existence of solutions for the complex Ginzburg-Landau equations with p-Laplacian, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5-July 9, 2018 Taipei, Taiwan.
- (10) S. Uchida and M. Otani; Right-differentiability of solutions to nonlinear evolution equation with perturbation, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5-July 9, 2018 Taipei, Taiwan.
- (11) 喜多 航佑, 大谷 光春, 坂本 浩紀; Some threshold property for a reaction diffusion system arising from a nuclear reactor model, 2018年3月21日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於東京大学数理科学研究科 )
- (12) 黒田 隆徳, 大谷 光春; Solvability of complex Ginzburg-Landau equations with non-dissipative terms in general domains, 2017年9月14日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於山形大学理学部 )
- (13) 喜多 航佑, 大谷 光春, 坂本 浩紀; On some elliptic systems arising from a nuclear reactor model, 2017年9月14日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於山形大学理学部 )
- (14) 内田 俊, 大谷 光春; On the maximality of sum of maximal monotone operators in a Hilbert space, 2017年3月27日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於首都大学理学部 )
- (15) 黒田 隆徳, 大谷 光春; Finite time blow-up for a Ginzburg-Landau equation without linear term, 2017年3月27日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於首都大学理学部 )
- (16) 内田 俊, 大谷 光春; Periodic problem for double-diffusive convection system in  $\mathbb{R}^N$  with  $N=3,4$ , 2015年9月16日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於京都産業大学・理学部 )
- (17) 黒田 隆徳, 大谷 光春; Solvability of complex Ginzburg-Landau equations with non-dissipative terms, 2016年9月18日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於関西大学数学科 )
- (18) 内田 俊, 大谷 光春; Right-differentiability of solution of some evolution equation with non-monotone perturbation, 2016年9月18日 日本数学会・実函数論分科会 ( 於関西大学数学科 )
- (19) 山内 雄介, 大谷 光春, 小山 哲也; On a regularity theorem for rectangular domain, 2016年9月16日 日本数学会・函数方程式論分科会 ( 於関西大学数学科 )
- (20) T. Kuroda and M. Otani; Solvability of the complex Ginzburg-Landau equation, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 1-July 5, 2016 Orlando, Florida, USA.
- (21) S. Uchida and M. Otani; Time periodic problem of a system describing double-diffusive convection phenomena in the whole space, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 1-July 5, 2016 Orlando, Florida, USA.
- (22) Y. Kurosaki and M. Otani; Asymptotic behavior of some gradient-like systems, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 1-July 5, 2016 Orlando, Florida, USA.

(1)研究代表者

大谷 光春 (OTANI MITSUHARU)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：30119656

(2)研究分担者:なし

(3)研究協力者

赤木 剛朗 (AKAGI GOROU)  
東北大学・理学研究科・教授  
研究者番号：60360202

石渡 通徳 (ISHIWATA MICHINORI)  
大阪大学・基礎工学研究科・教授  
研究者番号：30350458

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。