

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13455

研究課題名(和文)超低速の溶解現象と特異拡散の数理解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis of superslow solution and anomalous diffusion

研究代表者

山本 昌宏 (Yamamoto, Masahiro)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50182647

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：設備などが超低速で溶解し、内部から汚染物質などが土壌など不均質媒質中を拡散する現象について数理解析を行った。不均質性のため、密度の空間・時間変化においては、通常の拡散方程式が示すような強い平均化はなく、特異拡散であることが知られていた。本研究において、特異拡散現象をよりよく記述するモデル方程式として、非整数階偏微分方程式を考えて、初期値・境界値問題や、方程式の係数の決定のような逆問題の一意性と安定性の数学解析の結果を得た。また福島原発事故後のセシウムの特異拡散の解析を行い、実データとの良好な一致をみた。超低速の溶解現象については、溶解の逆現象とみなすことができる凝集の解析を行った。

研究成果の概要(英文)：In the case where a part of a plant is solved super-slowly and contaminants diffuse in heterogeneous media such as soil, I mathematically analyzed. By the heterogeneity, the profile in time and space does not indicate strong smoothing as the classical diffusion equation, and is known as anomalous diffusion. Within this project, I discuss fractional partial differential equations as models which can describe anomalous diffusion phenomena better, and have established the well-posedness of initial-boundary value problems and the uniqueness and the stability for various inverse problems such as the determination of coefficients in equations. Moreover I execute mathematical and numerical analyses for the anomalous diffusion of cesium and such results can interpret the real data well. I consider the superslow solution as a reciprocal process to the aggregation.

研究分野：応用解析

キーワード：特異拡散 不均質媒質 非整数階偏微分方程式 凝集 セシウムの特異拡散

1. 研究開始当初の背景

溶解は結晶成長と逆の現象と考えられ、夥しい研究成果がある結晶成長や核形成などの現象の解析を用いれば解明できると思われてきた。しかしながら測定技術の最近の著しい発達により、溶解は単純に結晶成長の逆の過程ではなく、超低速の溶解、比較的速い拡散、凝集・核生成が繰り返されて進行していく過程であることがわかってきた。廃棄物の地下貯蔵場の施設は時には数万年という極めて長い時間スケールで保持していかななくてはならないので、たとえ溶解が超低速で進行していても、施設の保全のためには無視できず、最終的にはきわめて危険な状況を引き起こす可能性がある。土中の建造物などの溶解過程を構成している凝集や拡散などの素過程の速度も一様ではなくマルチスケールモデルも必要とされる。凝集・核生成・結晶成長を個々に考える場合には、既にレベルセット法など多くの研究成果がある。申請者も核形成のモデル化であるタイムコーン法の数学解析や画期的な数値計算法を発表してきた。さらに、不均質媒質中の特異拡散に関しても、マクロモデルである非整数階拡散方程式やマイクロモデルである連続時間ランダムウォークに関して、解の一意存在、正則性、さらには拡散を支配するパラメータやソース項を境界データで決定する逆問題の研究が最近になって急速に進んでいる。申請者は非整数階拡散方程式の初期値・境界値問題の解の一意存在、解の最大正則性、時間が経過したときの漸近挙動などの解の定性的性質や逆問題に関し2009年以來研究を行っている。このように本研究の対象である超低速の溶解の素過程である核形成と拡散に関連しては、かなり研究成果が蓄積されているものの、それらの素過程を組み合わせて溶解現象全体を記述する数理モデルの研究成果はなかった。

2. 研究の目的

建造物の老朽化の対策のためにはプロセスの数学モデルが必要であるが、水の作用により溶解し、またそれが凝集して別物質になっていくというプロセスの数理解析は、現時点ではほとんどなされていない。そのような溶解のプロセスの数理モデルの構築が主要目的である。さらに構築された数理モデル式の解の一意存在などの数学解析を行う。また溶解の素過程である不均質媒質の拡散現象の非整数階拡散方程式による数理モデルの解析も行う。本研究計画では、非線形偏微分方程式を中心とした巨視的モデルやメソスコピックモデルを主に用いて、数理モデル式を確立する。

3. 研究の方法

(1) 研究は応募者単独による理論的なものであった。溶解、凝集、拡散の現象の研究が、当初の予想よりもはるかに多様な分野において進んでいる状況が研究開始後にわかったため、当初の研究計画にあった専門家を連

携研究者に加えることはあえてせずに、研究連絡を柔軟に行うこととした。本研究の主要な対象は次の2つの基本的な過程に分けることができる：超低速の溶解と特異拡散

(2) 超低速の溶解過程の数学解析としては、凝集現象をタイムコーン法に基づき数学モデルを構築した。凝集現象は、厳密には、超低速の溶解現象の逆の現象として完全に理解することはできないが、近似的にそのようにみなせると判断した。そのためにタイムコーン法を偏微分方程式によって引き続き詳細に研究した。

(3) 基本的な過程の2つ目の特異拡散現象については、非整数階偏微分方程式による数学モデル式を主に採用して、古典的な偏微分方程式論に従って解析を一層進めた。さらに、そのような成果に基づいて、物理パラメータのデータによる決定などの逆問題の考察を進めた。

(4) 実際の応用として、福島原発事故後のセシウムの特異拡散現象の数学モデル式の解析も行って、それに基づく数値解析結果と現場のデータとの照合も行い、数学モデル式ならびに解析結果の検証も行った。

4. 研究成果

以下の3つに分けて述べる：

(1) 超低速の溶解過程を近似的に凝集現象の逆過程と捉えた。溶解過程の理解のために、凝集過程の数学解析、数値解析を推し進めて、その逆として、超低速の溶解過程の数理的な解明に迫った。すなわち、ここで得た成果の逆現象を考えることによって、超低速溶解現象の数学解析が終了するが、そのための凝集過程のタイムコーン法を双曲型偏微分方程式でとらえて数学モデルを構築し、数学解析ならびに数値解析を完成させた(次項「5. 主な発表論文等」：以下、「次項5.」と略記する)。

(2) 特異拡散の数学モデル式である非整数階偏微分方程式の基礎理論の構築のために基本となる論文を完成させた(次項5.)。本研究によるこのような成果は、国内外で注目を集め、基礎的な文献として引用され、国際的にこの分野における研究動向を先導するものとなっている。その現れとして、国際会議での招待講演や非整数階解析学におけるハンドブックの執筆(次項5.)の依頼をあげることができる。

(3) 現実の特異拡散への数理科学的手法の応用として、福島原発事故後のセシウムの特異拡散現象の数学解析を行い、それに基づく数値手法による予測値が、福島第一原発付近の80 km X 40 kmの地域におけるセシウムの空間線量率の航空機モニタリングによる実データを良好に再現していることが確認され、本研究による手法の現場での信頼性を確認でき、関連する地域のセシウムの長期汚染予測マップのより正確な作成にも役立つことが期待されている。

<引用文献>「ものづくりから汚染予測まで

難問を解消する“万能方程式” 週刊ダイヤモンド、平成28年7月2日、p. 62.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計14件) いずれも査読あり

Luchko, Yuri and Yamamoto, Masahiro, Maximum principles for the time-fractional diffusion equations, Chapter 10 of "Frontiers in Fractional Calculus", Bentham Science Publishers, Chiba, Japan

Yamamoto, Masahiro, Weak solutions to non-homogeneous boundary value problems for time-fractional diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), 365-381.

Kian, Y.; Oksanen, L.; Soccorsi, E.; Yamamoto, M. Global uniqueness in an inverse problem for time fractional diffusion equations. *J. Differential Equations* 264 (2018), 1146-1170.

Loreti, Paola; Sforza, Daniela; Yamamoto, Masahiro, Carleman estimates for integro-differential parabolic equations with singular memory kernels. *J. Elliptic Parabol. Equ.* 3 (2017), 53-64.

Luchko, Yuri; Yamamoto, Masahiro, On the maximum principle for a time-fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 20 (2017), 1131-1145.

Jiang, Daijun; Li, Zhiyuan; Liu, Yikan; Yamamoto, Masahiro, Weak unique continuation Property and a related inverse source problem for time-fractional diffusion-advection equations. *Inverse Problems* 33 (2017), 055013, 22 pp.

Li, Zhiyuan; Luchko, Yuri; Yamamoto, Masahiro, Analyticity of solutions to a distributed order time-fractional diffusion equation and its application to an inverse problem. *Comput. Math. Appl.* 73 (2017), 1041-1052.

Kian, Yavar; Yamamoto, Masahiro, On existence and uniqueness of solutions for semilinear fractional wave equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 20 (2017), 117-138.

Cheng, Xing; Li, Zhiyuan; Yamamoto, Masahiro, Asymptotic behavior of solutions to space-time fractional diffusion-reaction equations. *Math. Methods Appl. Sci.* 40 (2017), 1019-1031.

Liu, Yikan; Rundell, William; Yamamoto, Masahiro, Strong maximum principle for fractional diffusion equations and an application to an inverse source problem. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 19 (2016), 888-906.

Liu, J. J.; Yamamoto, M.; Yan, L. L. On the reconstruction of unknown time-dependent boundary sources for time fractional diffusion process by distributing measurement. *Inverse Problems* 32 (2016), 015009, 25pp.

Li, Zhiyuan; Imanuvilov, Oleg Yu.; Yamamoto, Masahiro, Uniqueness in inverse boundary value problems for fractional diffusion equations. *Inverse Problems* 32 (2016), 015004, 16pp.

岡宏樹、羽田野祐子、山本昌宏, 「土壤中放射性核種の下方浸透のモデル化と移流拡散による濃度予測」, *Proceedings of the 16th Workshop on Environmental Radioactivity* pp. 258-265, 2015.

Liu, Yikan; Jiang, Daijun; Yamamoto, Masahiro, Inverse source problem for a double hyperbolic equation describing the three-dimensional time cone model. *SIAM J. Appl. Math.* 75 (2015), 2610-2635.

[学会発表](計7件)

山本昌宏 Inverse problems for diffusion equations in industry and environments: case studies A3 Workshop on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems CSIAM 2017, Ocean University of China, Qingdao, 13 October 2017

山本昌宏 Mathematical case studies related to climate change 17 March 2017 Mathematical Approach to Climate Change Impacts, INdAM Rome

山本昌宏 Unique existence and qualitative studies of solutions to initial-boundary value problems for time-fractional diffusion equations and applications Workshop on Control and Inverse Problems for Partial Differential Equations, Zhejiang University, 26 October 2016

山本昌宏 Well-posedness of initial-boundary value problems for time-fractional diffusion equations and inverse problems Chemnitz Symposium on Inverse Problems, Technische Universität at Chemnitz 23 September 2016

山本昌宏 Forward and Inverse problems for fractional diffusion equations: some overview "4th International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications" Shandong University of Technology, Zibo, 10 July 2016

山本昌宏 Inverse problems for fractional diffusion equations: introduction and some overview "Recent Development in Inverse Problems for Partial Differential Equations and its Applications" RIMS

Kyoto University, 28 January 2016

山本昌宏 Expanding Applications of
Inverse Problems in Industry and
environments: case studies, Taiwan-Japan
Joint Workshop on Inverse Problems and
Related Topics

National Taiwan University, Taipei 22
November 2015

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

6. 研究組織

(1)研究代表者

山本 昌宏 (YAMAMOTO, Masahiro)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号:50182647

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

なし