

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 23 日現在

機関番号：32619

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13461

研究課題名(和文)爆発現象の数値解析の新展開～爆発曲線、領域爆発、再爆発現象～

研究課題名(英文)Development of numerical analysis of blow-up phenomena - blow-up curve, regional blow-up, multiple blow-up -

研究代表者

石渡 哲哉 (Ishiwata, Tetsuya)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：50334917

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：微分方程式の解の大きさが有限時間で無限大に発散する現象を爆発現象という。本研究では、これまで研究が進んでいなかった爆発曲線・領域爆発・再爆発現象といった爆発現象に焦点をあて、これに対する数値計算の方法を提案し、これらに対する理論的研究と平行して数値計算を進め、いくつかの予想を立てることが出来た。更に、一部の予想については研究期間内に数学的に証明を行うことができた。

研究成果の概要(英文)：Blow-up phenomena are typical nonlinear phenomena in several mathematical models. Here “blow-up” means that a size of the solution becomes infinity in a finite time, that is, the solution has a singularity. In this research project, we focus on blow-up curves, regional blow-up and multiple blow-up in some partial differential equations. In these phenomena it is important to understand the geometric properties of the solutions in time-space plane, the strength of the singularity(blow-up rate), and their relations. We show some numerical methods to these topics and get many numerical observations. Moreover, we show mathematical results on some of those numerical conjectures.

研究分野：応用数学

キーワード：数値解析 解の爆発 爆発レート 領域爆発 爆発曲線 再爆発現象

1. 研究開始当初の背景

時間発展型の非線形の微分方程式の解の大きさ等が有限時間で無限大になることを解の爆発現象と呼び、そのような解を爆発解という。このような現象では、時空間中に特異点を形成することになり、方程式の解構造を調べる上でその特異点の性質を深く知ることが重要となる。しかし、これまで多くの研究では特異点が点からなる点爆発現象に対するものがほとんどであった。

2. 研究の目的

本研究では、これまでよく研究されてきた点爆発現象ではなく、特異点集合が広さを持つ領域爆発の問題、時空間中で曲線を形成する爆発曲線の問題、複数の時間で爆発する再爆発現象など、これまであまり研究が進展していなかった爆発現象を研究対象とし、それらの性質を調べるための数値的手法を整備することを第一の目的とし、更に数学解析へ良質な予想を与え理論解析の進展への寄与を目指す。

3. 研究の方法

非線形微分方程式の数値解析的研究では、数値解の安定性や精度、収束次数なども重要であるが、方程式の構造や解の重要な性質に着目して、それらを再現するような離散化を考え、それを用いた数値計算をすることが特に近年盛んである。爆発問題についてはこれまで解の爆発を再現する方法や数値的な爆発時刻の真の爆発時刻への収束などが議論されてきていたが、本研究では更に踏み込んで爆発解を持つ特異点集合の性質を数値計算により洗い出すことを考えた。これには方程式の構造や解の性質などに関する理論的研究からの知見を数値計算法に生かすことにより目指した。具体的には方程式の持つスケール不変性などの構造を利用した数値計算法を用いる方法や、爆発曲線に漸近する解のあるレベルセットを追跡する方法、再爆発現象の背後にある粒子の拡散モデルに対する数値計算などを用いた。また、分担者だけでなく、内外の数値解析研究者や爆発問題の理論的研究を行っている研究者らと定期的な会合を開き、情報交換および議論を行うこととした。

4. 研究成果

曲率流に関係するある準線形放物型方程式の爆発解は領域的に爆発し、またその爆発レートが所謂タイプ2であることが知られている。この問題に対して数値的にはその領域爆発を再現するスキームを利用し、更にその数値計算ソルバーを方程式のスケール不変性を使ったリスケリングアルゴリズムに組み込むことにより得られるリスケリング時間列から爆発レートを推定する理論的枠組みを与えることができた。この枠組みは

個別の方程式に寄らず、スケール不変性をもつ方程式に対して適用できる幅広い方法であり、今後爆発レートを調べる際の基本的手法の1つとなりうると考えている。この方法を用いて当該の問題に対して爆発レートを数値的に調べ、また、それと平行して理論的解析も進め、タイプ2爆発解の爆発レートを推定するとともに、爆発領域の中心と端点の関係についてもこれまで知られていなかった知見を得ることができた。爆発領域に関する収束性については理論的な結果を得ることができなかったが、これは今後の研究課題としたい。

時間に関する導関数に非線形性をもつある非線形波動方程式を考えて、これに現れる爆発曲線の問題について数値的および理論的研究を行った。Choにより開発された固定刻みを用いる数値計算方法のアイデアを利用し数値解析を行った。これにより、爆発曲線に特異性が表れる状況についての情報を多く引き出すことに成功し、それを元に爆発曲線上の特異点を解析するためのテスト問題を提案し、これに対していくつかの条件下で数値的予測が正しいことを明らかにした。この爆発問題についてはまだ理論的に分かっていないことが多く、我々の数値計算から得られた予測にもまだ未解決なものが多い。これらについてはより発展的な問題として今後の研究課題としたい。

レーザービームの自己集束および複数回の自己集束のモデルとして非線形シュレディンガー方程式がある。この背景には確率微分方程式で記述される粒子の拡散モデルがあり、これに対する数値計算方法の研究を行った。ただし、現段階ではまだ直接上記のフルモデルの数値計算法の開発は終わっておらず、これに対する基礎研究ということで冪型の非線形性をドリフト項および拡散項の両方にもつ確率微分方程式に対する研究を行った。この問題について、従来提案されている手法の不備を修正し、かつ、数値計算コストを抑えることができる新しい数値計算方法を提案し、この離散スキームに対する理論的結果として数値爆発時刻の収束性を示すことができた。また、従来取り扱いが難しかった臨界指数の場合に対して、パラメータにある条件を与えることにより確率1で解が爆発すること、その爆発時刻がサンプルによらない値で特徴付けることができることを示した。特にこの後者については、これまで同様の爆発時刻の特徴付けは得られておらず、新しい視点を与えるものとなっている。今後はこの計算方法の理論的整備を行うとともに、最初に挙げたレーザービームの再自己集束問題へ適用できるよう拡張を行う予定である。

以上の三点は本研究課題の申請段階で想定していた問題であるが、本研究を実施しながら発見した新たな爆発問題についての研究として、ある遅延微分方程式の爆発問題が

ある。上記三点も特異点集合の非局所性が重要な視点となる問題であるが、遅延微分方程式は問題そのものが非局所的となり理論的・数値的取り扱いが難しくなる。特に通常のODEやPDEの爆発解の数値計算で多くの場合用いられる可変型時間刻みの方法を適用することが困難になり、新たな方法が必要となるが、現段階において定数遅延の場合には数値爆発時刻の真の爆発時刻への集束が保証できる数値計算方法を開発した。このアイデアと連続ルンゲクッタ法を合わせることで可変型の時間遅れ問題にも適用できると考えており、今後研究を進める予定である。また、本研究を進める間に、これまで遅延微分方程式の研究で知られていなかったタイムラグが誘導する爆発現象を初めて捉え、リミットサイクル振動を持つ単純な2次元系において爆発のメカニズムを明らかにした。現在この現象に delay-induced blow-up と名付け、一般的な枠組みでの証明の整備や他のメカニズムによる爆発、解の爆発に至るまでの詳細な挙動と周期解の関連など、新たな研究へ展開中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Numerical study on the blow-up rate to a quasilinear parabolic equation, K. Anada, T. Ishiwata and T.K. Ushijima, Proceedings of EQUADIFF 2017, 2018, 325--330. 査読有

Regularity and singularity of the blow-up curve for a nonlinear wave equation with a derivative nonlinearity, Takiko Sasaki, Adv. Differential Equations 23 (2018), 373-408. 査読有

A numerical method of estimating blow-up rates for nonlinear evolution equations by using rescaling algorithm, K. Anada, T. Ishiwata and T.K. Ushijima, Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 35 (2018), 33--47. (Publish online: 14 October 2017) DOI: 10.1007/s13160-017-0273-9 査読有

Blow-up Rates of Solutions of Initial-Boundary Value Problems for a Quasi-Linear Parabolic Equation, K. Anada and T. Ishiwata, Journal of Differential Equations 262(2017), 181--271. DOI: 10.1016/j.jde.2016.09.023 査読有

Numerical validation of blow-up

solutions of ordinary differential equations, Akitoshi Takayasu, Kaname Matsue, Takiko Sasaki, Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi, J. Comput. Appl. Math., Vol. 314, Apr. 2017 (available online Oct. 2016) 10-29, 10-29, DOI:10.1016/j.cam.2016.10.013. 査読有

Finite difference approximation for nonlinear Schrödinger equations with application to blow-up computation, N. Saito and T. Sasaki, Jpn. J. Ind. Appl. Math., Vol. 33 (2016) 427-470. DOI: 10.1007/s13160-016-0218-8 査読有

Blow-up of finite-difference solutions to nonlinear wave equations, N. Saito and T. Sasaki, J.Math.Sci.Univ.Tokyo, 23 (2016), 349-380. 査読有

[学会発表](計22件)

Numerical approach of estimating blow-up rate using the scale invariance, T. Ishiwata, International Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, Tamkang University, Taiwan, March 23, 2018.

Numerical and mathematical analysis for the blow-up curve of solutions to 1-dimensional nonlinear wave equations, T. Sasaki, The Hong Kong Polytechnic University International Workshop on Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2018.

リスケーリング・アルゴリズムによる爆発レートの数値的推定について, 石渡哲哉, 北陸応用数理研究会 2018, しいのき迎賓館, 金沢市, 2018.2.19.

Interface motion and singularities, T. Ishiwata, Mini-Workshop 2018 on Nonlinear phenomena, Modeling, PDEs and Simulation, Technische Universität München, München, January 5, 2018.

有限要素法による高次元半線形熱方程式の球対称解の数値計算, 中西徹, 齊藤宣二, 応用数学合同研究集会, 2017.

時間遅れが引き起こす爆発現象について, 石渡哲哉, 第1回松江数理生物学・現象数理学ワークショップ, 松江テルサ, 2017.11.30.

1次元非線形波動方程式の爆発曲線に関

する数値・数学解析, 佐々木多希子, RIMS 共同研究(公開型) 数値解析学の最前線 - 理論・方法・応用 -, 2017

Delay-induced blow-up in an Oscillation model, T. Ishiwata, RIMS 共同研究(公開型)「実領域における常微分方程式研究の継承と革新」, 数理解析研究所, 2017.11.6.

Mathematical and numerical studies on the blow-up rate to a quasi-linear parabolic equation, T. Ishiwata, Minisymposium MS-20 "Asymptotic analysis of nonlinear parabolic equations", Equadiff 2017, Slovak University of Technology in Bratislava, Bratislava, Slovakia, July 27, 2017.

タイムラグが引き起こす爆発現象: リミットサイクル振動モデルを題材に, 石渡哲哉, 日本数学会 応用数学分科会, 首都大学東京, 2017.3.17.

Delay-induced blow-up in a limit-cycle oscillation model, T. Ishiwata, 2017 NCTS Workshop on Applied Mathematics at Tainan, Tainan University, Taiwan, March 6, 2017.

Delay-induced blow-up in some limit-cycle oscillation model: mathematical and numerical analyses, 石渡哲哉, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学 瀬田キャンパス, 2016.12.16.

決定論的な系の中の確率論的な性質: 二つの例 (Stochastic nature in deterministic systems: two example), 名和 範人, International workshop on mathematical science for nonlinear phenomena, 2016年

Numerical and mathematical analyses of blow-up solutions to ODE system with a delay, (poster), T. Ishiwata, Czech-Japanese-Polish Seminar in Applied Mathematics 2016, AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland, Sep. 5, 2016.

Regularity and singularity of the blow-up curve for a nonlinear wave equation, Czech-Japanese-Polish Seminar in Applied Mathematics 2016, T. Sasaki, September 5-9, 2016, AGH University of Science and Technology.

Finite difference approximation for nonlinear Schrödinger equations with

application to blow-up computation, T. Sasaki and N. Saito, The Sixth China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, August 22-26, 2016, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea

非線形シュレーディンガー方程式とネルソン拡散過程, 名和 範人, 第3回 量子渦と非線形波動, 2016年

Regularity and singularity of the blow-up curve for a nonlinear wave equation, T. Sasaki, EASIAM 2016, June 20-22, 2016, University of Macau.

非線形項に未知関数の導関数を含む波動方程式の爆発曲線について, 佐々木多希子, 第21回さいたま数理解析セミナー, 2016年

消散型波動方程式の爆発曲線に対する数値計算と数学解析, 佐々木多希子, Perspectives in Mathematical Sciences 2016, 2016年

21 The properties of type II blow-up to some quasilinear parabolic equation, T. Ishiwata. 2016 NCTS Workshop on Applied Mathematics, National University of Tainan, 2016. 3. 28.

22 Blow-up of finite difference solutions to nonlinear Schrödinger equations, T. Sasaki and N. Saito, ICIAM 2015, China National Convention Center, Beijing, China, 2015. 8. 10-14.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 哲哉 (ISHIWATA, Tetsuya)
芝浦工業大学・システム理工学部・教授
研究者番号: 50334917

(2) 研究分担者

齊藤 宣一 (SAITO, Norikazu)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 00334706

名和 範人 (NAWA, Hayato)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号: 90218066

佐々木 多希子 (SASAKI, Takiko)
明治大学・理工学部・助教
研究者番号: 30780150