

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13532

研究課題名(和文) ファントム で捉える非可積分トポロジー束縛とその特異摂動

研究課題名(英文) Phantom: A topological method to analyze macro-system and its singular perturbation

研究代表者

吉田 善章 (Yoshida, Zensho)

東京大学・大学院新領域創成科学研究科・教授

研究者番号：80182765

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：マクロ系で起こる自己組織化現象の根底に「トポロジー束縛」があると考えられる。ハミルトン系の理論では、トポロジー束縛がカシミール不変量(典型的にはヘリシティ)の形に積分できると、位相空間が葉層化され、カシミール葉が有効な位相空間になる。しかし一般のトポロジー束縛は可積分ではない。本研究では「ファントム」と呼ぶ新しい変数を導入して位相空間を拡張することで、トポロジー束縛を積分してカシミール不変量(クロスヘリシティ)を定義する方法を開発した。この理論は、様々な非正準ハミルトン系(剛体、流体、プラズマなど)の分岐現象や不安定性を解析することに応用できる。

研究成果の概要(英文)：Topological constraints play a key role in the self-organizing processes that create structures in macro systems. Some topological constraints are represented by Casimir invariants (such as helicities), and then, the effective phase space is reduced to the Casimir leaves. However, a general constraint is not necessarily integrable, which precludes the existence of an appropriate Casimir invariant. We have formulated a systematic method to embed a Hamiltonian system in an extended phase space; we introduce “phantom fields” and extend the Poisson algebra. A phantom field defines a new Casimir invariant, a cross helicity. This hierarchical relation of degenerate Poisson manifolds enables us to see the interior of a singularity as a sub Poisson manifold. The theory can be applied to describe bifurcations and instabilities in a wide class of general Hamiltonian systems.

研究分野：非線形科学, プラズマ物理学

キーワード：トポロジー束縛 自己組織化 葉層構造 ハミルトン力学系 カシミール元 ヘリシティ 階層構造
可積分

1. 研究開始当初の背景

宇宙の様々な局所構造は、しばしば「渦」となって現れる。私たちは「渦」を位相空間の葉層構造として捉える立場で研究を行ってきた。渦構造は、ヘリシティーなどに代表されるトポロジー束縛によって葉層化した位相空間上につくられる統計的な平衡状態だと説明できる [Z. Yoshida, S.M. Mahajan, Prog. Theor. Exp. Phys. (2014), 073J01]。この研究の中から、本研究につながる理論的な挑戦が生まれた。

流体・プラズマのマクロ階層は非正準ハミルトン力学系のカシミール葉 (leaf) として定式化することができ、様々なカシミール元 (ヘリシティーなど) によって多様な渦構造が分岐する [Z. Yoshida; Self-organization by topological constraints: hierarchy of foliated phase space, Adv. Phys. X 1 (2016), 2-19]。このような幾何学的な理論は、アーノルドなどによって構築された余随伴軌道の幾何の枠組みで語り直せると思われがちだが、しばしば見落とされる問題として、カシミール葉として「積分」できないトポロジー束縛の存在がある。ケルビンの法則として知られている「循環の保存」がその例である。いうまでもなく循環の保存 (あるいは破壊) は渦の運動、統計力学、あるいは渦のリコネクションなどにおいて決定的な役割を担っており、これを理解するための幾何学的理論を構築することが重要な課題である。

2. 研究の目的

カシミール元として「積分」できないトポロジー束縛は「ファントム」を導入して拡大した位相空間の特異点として定式化できる [Z. Yoshida, P.J. Morrison, Fluid Dyn. Res. 46 (2014), 031412]。逆に、位相空間の特異点はトポロジー束縛をもつ部分系だと見ることができ、これは無限次元空間で超函数のカシミール元を構築することを意味し、同時に特異点内部の構造を部分力学系と考える新しい視点である。非可積分なトポロジー束縛を位相空間 (Poisson 多様体) の特異点として厳密に定式化し、より高い次元の位相空間に埋め込むことで葉層の階層構造として理解する。これによってトポロジー束縛の特異振動が幾何学的に記述できるようになる。この理論を応用して、剛体、流体、プラズマなどに起こる特異な運動や自己組織化現象をトポロジー束縛の視点から解明する。

3. 研究の方法

剛体、流体、プラズマのモデルにはしばしば非正準ハミルトン形式 (退化したポアソン多様体) が現れる、その特異性が様々な特異的運動の原因となっている。余随伴軌道が載っているシンプレクティック多様体がカシミール葉のどのような部分多様体になっているのかについてクレブシュ表現を頼りにして解明する。とくに特異点における多様

体の接続の構造を明らかにすることが鍵になる。ファントムと呼ぶ (抽象的な) 場を導入して位相空間を拡張すると、カシミール元として積分できないトポロジー束縛 (とりわけ「循環」) を積分して高次元空間の特異な (超関数) カシミール元を構築することができる。こうしてトポロジー束縛をスカラーで表現すれば、トポロジー束縛を摂動する理論を書くことができる (このとき、抽象的な場であったファントムは拡張されたハミルトニアンに含まれることで実在化する)。特異摂動によってトポロジー変化がどのように起こるのかを明らかにする。

4. 研究成果

剛体、流体、プラズマなどマクロ系に現れる構造や特異な運動は、これらの系に係わるトポロジー束縛の効果によるものだと考えられる。支配方程式をハミルトン形式に書くと、トポロジー束縛はポアソン作用素の自明でない核 (kernel) によるものだと理解できる。その核がカシミール不変量として積分できる場合には、位相空間が葉層化され、カシミール葉に束縛された運動によってトポロジー束縛の効果が解析できる。しかし、一般のトポロジー束縛は非可積分である。本研究では、「ファントム」とよぶ抽象的な変数を導入して位相空間の拡張することで、非可積分な特異点を積分可能とし、その内部構造の解析に役立てることができるとを示した。

シンプレクティック葉がどのような部分多様体になっているのかについてファントムの概念を用いて解析した。この理論は、様々な非正準ハミルトン系 (剛体、流体、プラズマなど) の分岐現象や不安定性を解析することに応用できる。

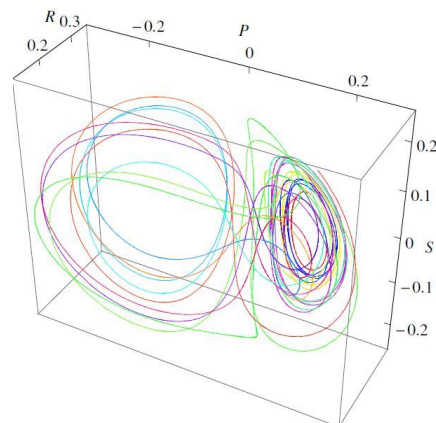


図1: ビアンキ・タイプ VI のリー・ポアソン系に対する特異摂動で生じるカイラルなカオス。

1) 3次元非正準ハミルトン系の分類と特異点の解析: 縮退したポアソン多様体のプロトタイプとして3次元空間を考え, これにビアンキ (Bianchi) によって分類されたリー代数でリー・ポアソン代数を定義し, その葉層構造を分類した. その結果, ビアンキの分類で Class B と呼ばれるものは, シンプレクティック多様体上に特異点をもつことが示された. この特異点は, 葉層をミラー対称性が壊れた部分多様体分割し, その結果, カイラルな運動が生み出されることが明らかになった [1]. ファントムを導入して位相空間を4次元に拡張すると, 特異点が解消し, カシミール不変量はハミルトニアン対称性に読み替えられる. ハミルトニアンを摂動することで不変量が壊れ, 運動はカオスになる. Class B から構成される系にはカイラルなカオスが生じることが示された (図1).

2) 無限次元ハミルトン力学系の正準化とトポロジー束縛: 流体やプラズマなどを通常の物理変数 (密度や流速, 磁場など) の位相空間で定式化すると非正準ハミルトン系になることがよく知られている. このような非正準構造は物理変数の下層にある正準変数に対する縮減 (reduction) が原因で生じたものだと考えることができる. 正準変数としてクレプシュ変数を考えると, そのゲージ対称性に関するネーター (Noether) 電荷がヘリシティーであることが示された [2]. 正準変

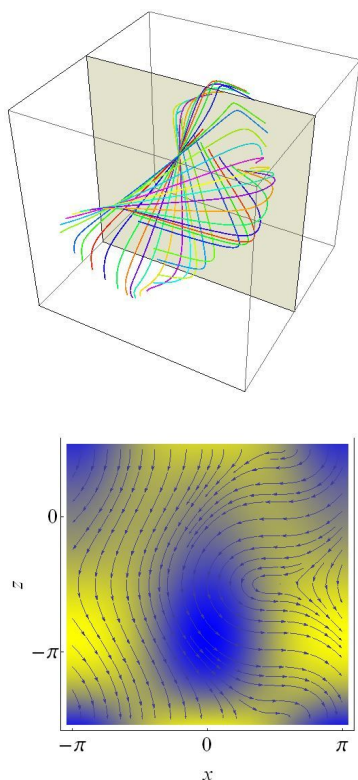


図2: 流体渦の3次元化と, それにともなうヘリシティー生成.

数にファントムを加えることで, 物理変数に対する非可積分な束縛を局所的保存量 (流れ場によってリー牽引される「電荷」) にして表現でき, 流体やプラズマの構造が幾何学的に複雑化するプロセスを解析する道具となる.

とくに「epi-2D」の概念は場を「粒子化」することができ, 一般の3次元流体における渦構造の複雑化は, epi-2D粒子の相互作用によるものとして表現することができる [3]. すなわち, epi-2D粒子が単独で空間をしめているときファントムとして粒子の空間体積を表現していたパラメタは, 2つのepi-2D粒子が衝突する (すなわち同時に同じ空間を占める) ときには渦場を表現する実在する場となる. これにともなうヘリシティーが生じる (図2).

[1] Z. Yoshida, T. Tokieda, and P.J. Morrison, Phys. Lett. A **381** (2017), 2772.

[2] K. Tanehashi and Z. Yoshida, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 495501.

[3] Z. Yoshida and P. J. Morrison, Phys. Rev. Lett. **119** (2017), 244501.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件) [全て査読あり]

Z. Yoshida and P. J. Morrison;

Epi-two-dimensional fluid flow: A new topological paradigm for dimensionality, Phys. Rev. Lett. **119** (2017), 244501 (5pp); DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.244501

Z. Yoshida, T. Tokieda, and P.J. Morrison; Rattleback: a model of how geometric singularity induces dynamic chirality, Phys. Lett. A **381** (2017), 2772—2777; DOI:10.1016/j.physleta.2017.06.039

Y. Ushida, Y. Kawazura, N. Sato, and Z. Yoshida; Inward diffusion and acceleration of particles driven by turbulent fluctuations in magneto-sphere, Phys. Plasmas **23** (2016), 114501 (5pp); DOI:10.1063/1.4967281

Z. Yoshida and S. M. Mahajan; Quantum spirals, J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016), 055501 (12pp); DOI:10.1088/1751-8113/49/5/055501

Z. Yoshida and P. J. Morrison; Hierarchical structure of noncanonical Hamiltonian systems, Phys. Scr. **91** (2016), 024001 (7pp); DOI:10.1088/0031-8949/91/2/024001

Z. Yoshida; Self-organization by topological constraints: hierarchy of foliated phase space, Adv. Phys. X **1** (2016), 2-19;

DOI:10.1080/23746149.2015.1127773
H. Abdelhamid and Z. Yoshida; Nonlinear Alfvén waves in extended magnetohydrodynamics, Phys. Plasmas **23** (2016), 022105 (5pp);
<http://dx.doi.org/10.1063/1.4941596>
N. Sato, Z. Yoshida and Y. Kawazura; Self-organization and heating by inward diffusion in magnetospheric plasmas, Plasma Fusion Res. **11** (2016), 2401009 (6pp); DOI:10.1585/pfr.11.2401009
Y. Ohno and Z. Yoshida; Nonlinear ion acoustic waves scattered by vortices, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **38** (2016), 277–287;
DOI:10.1016/j.cnsns.2016.02.018
N. Sato and Z. Yoshida; Up-hill diffusion, creation of density gradients: Entropy measure for systems with topological constraints, Phys. Rev. E **93** (2016), 062140 (5pp); DOI: 10.1103/PhysRevE.93.062140
K. Tanehashi and Z. Yoshida; Gauge symmetries and Noether charges in Clebsch-parameterized magnetohydrodynamics, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 495501 (20pp),
DOI:10.1088/1751-8113/48/49/495501

〔学会発表〕(計4件)

Z. Yoshida; Remarks on the Clebsch representation of fluid mechanics and turbulence, Turbulent mixing and beyond: non-equilibrium transport across the scales (6th Internat. Conf. TMB), International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 14--18 August 2017 [invited talk].
Z. Yoshida; Epi-two-dimensional flow and particle picture of fluids, IUTAM Symposium on Dynamics and Topology of Vorticity and Vortices, Carry-le-Rouet, France, 13--16 June 2017 [invited talk].
Z. Yoshida; What is macro?, public lecture for the opening ceremony of Technological Institute of Georgia (Tbilisi, Georgia) 24 May, 2016.
Z. Yoshida; A formulation of "macro hierarchy" and self-organization, 8th Festival de Théorie, Aix-en-Provence, France, 6--24 July 2015 [tutorial and lecture].

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ:

<http://www.ppl.k.u-tokyo.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田 善章 (YOSHIDA, Zensho)
東京大学・大学院新領域創成科学研究科・教授
研究者番号: 80182765

(4) 研究協力者

P.J. モリソン (MORRISON, J. Philip)
テキサス大学オースチン校・物理学科・教授

時枝 正 (TOKIEDA, Tadashi)
スタンフォード大学・数学科・教授