

令和元年6月25日現在

機関番号：32644

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13538

研究課題名(和文)量子系のエネルギー準位反発にみられるフラクタル的挙動の研究

研究課題名(英文) Study of self-similar fluctuation in level-spacing statistics of quantum systems

研究代表者

牧野 浩典 (Makino, Hironori)

東海大学・情報理工学部・准教授

研究者番号：40338786

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：自然界には「部分」と「全体」が相似的に折り畳まれた構造や文様が大小あらゆるスケールで普遍的に見られ、この現象をフラクタルとよびます。フラクタルは従来からの幾何学の概念を越え、今やカオスと並び非線形科学を象徴する重要な概念となっています。本課題では量子系の準位反発にフラクタル性を起源とする自己相似振動を検出し、詳細に解析しています。量子力学が有効性を増すマイクロスケールの物理現象においても、プランク定数で規定されるスケールまでフラクタル性が観測可能できる事を数値実験で明らかにしています。さらに、フラクタル性の発生と深い関係を持つ分岐現象が量子系に与える効果を半古典論の立場から理論的に解明しています。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本課題の最大の成果はフラクタル現象の量子力学的兆候を捉えたことにあります。研究成果は物性理論に加え、微小な半導体素子を扱う応用分野にも有用な知見を提供しています。また研究課題を進める中で偶然発見したエネルギー準位列の異常な集積は物理系の特性に依存しない普遍的な現象です。今後さらに研究を重ねることで、量子カオスの研究分野に新しい法則の存在を報告できます。この現象は準位集積の発生メカニズムに従来とは異なる新しい原因(古典系の分岐に由来する原因)があることを意味しています。非断熱遷移に関連した量子アニーリング法などの応用分野に対して有効な知見を提供することができます。

研究成果の概要(英文)：Fractals go beyond the concept of geometry and have become a symbol of nonlinear science along with chaos. In this research, using the theory of the level statistics developed to analyze the quantum manifestation of chaos, it is clarified that fractal can be observed also in physical phenomena of microscale such as atomic and molecular scales, where quantum mechanics becomes more effective. The self-similarity which is characteristic of the fractal, can be observed up to the limited scale defined by the effective Planck's constant.

研究分野：物性理論

キーワード：フラクタル 準位統計 量子カオス 自己相似性 分岐現象 ピリアード力学系

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

量子カオスの研究はこれまで主にコンピュータによる数値実験を含む理論研究主導で展開されてきた。その恰好の研究対象となった数理モデルはピリアード力学系で、量子力学が有効性を増す原子・分子スケールのピリアード台上を運動する粒子の振る舞いに関する研究である。とはいえ、そのようなミクロスケールのピリアード台が実際になれば、それは理論上のモデルにすぎない。ところが近年、超微細加工技術の最先端テクノロジーを用いて、化合物半導体のヘテロ結合面においてサブミクロンスケール (10^{-7}m) の2次元電子系 (ピリアード台) が容易に作製できるようになり、実験主導による量子カオス研究の新しい成果が報じられるようになった。なかでも有名なものにサウスウエールズ大のテイラーやミコリッヒ等のグループによるシナイピリアードの実験である[1]。この実験は細いリード線を接合したピリアード形状の半導体界面に一樣な垂直磁場をかけ、極低温下で電子の磁気伝導率を測定するというもので、ゼロ磁場近傍の電気伝導率の振る舞いにフラクタル的振動が発生することを明らかにしている。同様の実験結果はスタジアム型ピリアードなど複数のモデルでも観測されており [2,4]、こうした実験サイドからの報告は古典力学系に固有のフラクタル的特徴が量子系の側から検出されているのではないかと考えられ、たいへん注目された。中村ら[3]は磁気伝導率のフラクタル的挙動が背後の古典力学系におけるトーラス・カオス共存性にみられるフラクタル的島構造に由来しているのではないかと指摘している。その後も同様の考えに基づく研究が実験・理論の双方にみられたが[3-5]、古典力学系の分岐構造にみられるフラクタル的特徴を量子系の側から観測したとする決定力のある研究事例は存在していない。確かなフラクタル性を検出できる物理系の提案と、それを量子力学的効果へと導く理論的根拠を得ることが、この分野の発展には必要であると考えられてきた。本課題が研究対象とするレモン型ピリアード系には無数のサドルノード型分岐が観測され、分岐図上で明らかなフラクタル構造を呈していることが研究申請者の予備研究で明らかになっていた[6]。

2. 研究の目的

量子化されたトーラス・カオス共存系のエネルギー準位反発のパラメータ挙動において、古典力学系の分岐構造にみられるフラクタル性が確かに検出可能であることをレモン型ピリアード系に対する高精度な数値実験によって明らかにし、量子系の側からフラクタル的特徴を決定する。

3. 研究の方法

- (1) ピリアード力学系 (古典系) のフラクタル現象を規定する分岐パラメータ値を理論的に決定し分岐図を作成、フラクタル次元の計測を行う。
- (2) カオス領域の相体積比 (リュールビルメジャー) の計測方法を理論的に確立し、さらに数値実験により精密に計測、この量に生じるフラクタル的なパラメータ振動を数値計算により精密に求める。
- (3) 高性能なワークステーションを用いて量子ピリアードのエネルギー準位列を求め、分岐点の前後における準位反発力の挙動を明らかにする。カオス領域の相体積比と準位反発の大きさを定量化したベリー・ロブニックパラメータ[7]を比較することで量子系の側からフラクタル的な振動を検出、フラクタル次元を決定する。
- (4) 有効プランク定数の値とフラクタル構造の検出限界の関係について分析を進める。

4. 研究成果

本課題で研究対象としたのは図1のようなレモン型ピリアード系である。このピリアード系はピリアード台が2つの円弧からなるシンプルな力学系で、台の形状がパラメータ η の値に依存して決まる[7]。 η の値を変化させると力学系は完全可積分系からトーラス・カオス共存系を経由して強カオス系へと転移し、その途中段階で周期点が生成・消滅する分岐現象が無数に発生する。パラメータ空間上に分岐図を描くと無限周期に至るまで分岐構造にフラクタル性が生じている様子が確認できる(図2)。

(1) 本課題ではまず2周期点、3周期点、4周期点・・・と周期の短い順に周期点が生成・消滅する分岐点の位置(分岐パラメータ η)の厳密解を決定した。決定した各パラメータ値については「5. 主な発表論文」に収録している。

(2) 続いてカオス領域の相体積比(リュールメジャー)の計測方法を理論的に確立する研究に取り組んだ。2自由度以上の力学系でこれを実現するのは通常は容易なことではないが、ピリアード力学系には運動量不変の性質があるため、位相空間の次元を4から3に落とすことができ、数値計算で相体積比が計測可能である。具体的な方法は「5. 主な発表論文」の式(2)で提示している。この計測方法から数値的に求めたカオス領域の相体積比を図3の中の破線で示す。相体積比には各分岐点($n=2,3,4,\dots$)で著しい振動がみられ、無限周期にわたり分岐が繰り返される様子が鋸の刃のような形状の振動として観測されている。この振動はパラメータ空間上で無限階層まで続く自己相似性を呈し、明らかなフラクタル構造を形成している。

(3) このような古典系のカオス領域の相体積比にみられる特徴的な振る舞いを量子系の側からとらえるには、エネルギー準位間の反発の大きさを観測することが有効である。そして、準位反発の大きさとカオス領域の相体積比の直接の関係を与えるのがベリー・ロブニック統計である[7,8]。ベリー・ロブニック統計ではエネルギー準位間隔分布の数値解から得たベリー・ロブニックパラメータ η で準位反発の大小を特徴づけることができる。さらにこの量は半古典極限において古典系のカオス領域の相体積比に一致すると仮定

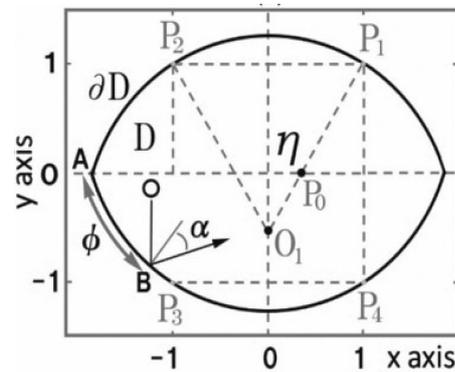


図1 ピリアード力学系の定義。出展元は[主な発表論文等・文献]

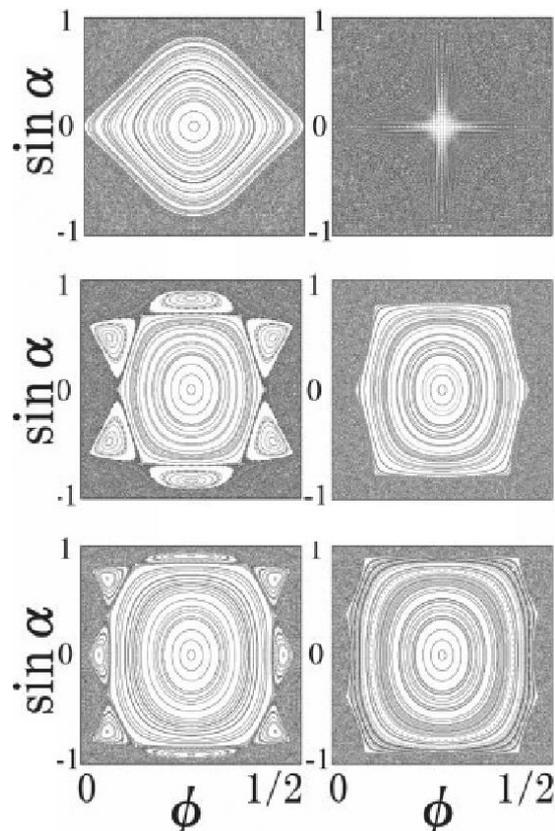


図2 ポアンカレ写像内の運動。出展元は[主な発表論文等・文献]

されている。 ρ^q のパラメータに対する依存性には古典系のフラクタル性を反映した自己相似振動が検出できることになる。図3の実線に量子レモン型ピリアードの準位列から得た ρ^q の値をプロットした。図3は本課題の最も重要な研究成果の一つである。興味深いことに ρ^q は古典系の自己相似的な振動をある程度のスケールまでよく再現しており、この再現性は半古典領域(すなわち高エネルギー領域)に近づくほど良くなる傾向がある。(a)(b)の低エネルギー領域では周期5($n=5$)の周期点に関する分岐の振動までを量子系の ρ^q が再現しているのに対し、これよりも高周期の周期点に関する分岐現象の振動はまったく再現できないことがわかる。(c)の高エネルギー領域では周期7($n=7$)の周期点に関する分岐の振動までを量子系が再現できるが、これよりも高周期の周期点振動はまったく再現できないことで n わかる。この再現性の限界の存在は当初の研究計画時から想定していたことで、以下の(4)で量子系の固有状態が相空間の微細構造をどのスケールまで検出できるのかを有効プランク定数を用いた議論で明らかにしている。

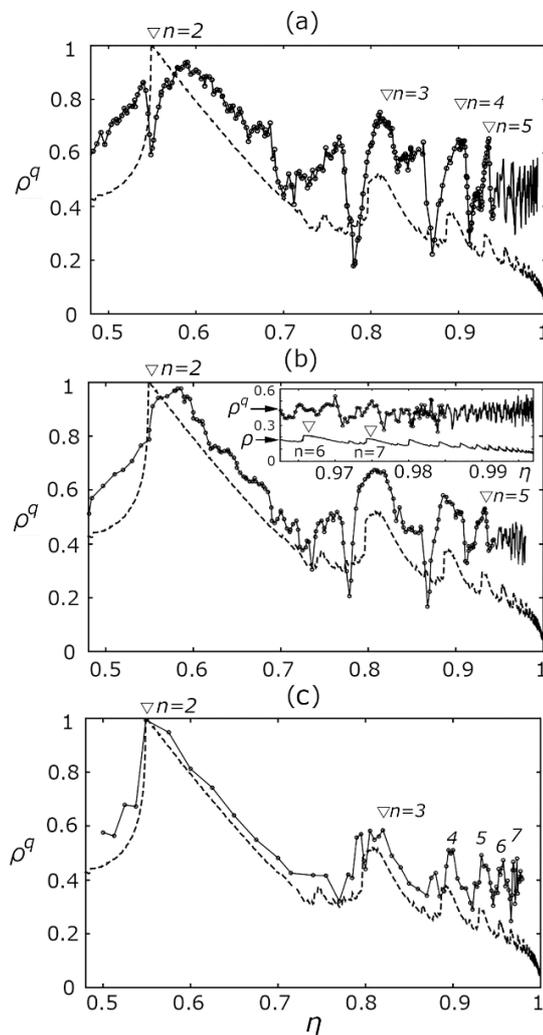


図4 ベリー・ロブニックパラメータ ρ^q (実線)とカオス領域の相体積比(破線)のパラメータ変動の比較。 n 周期点の分岐点の場所にマークを入れた。出展元は[主な発表論文等・文献]

(4)図3の結果を踏まえ、「5.主な発表論文」ではプランク体積の有効値を明らかにしながら、量子系の固有状態による微細な分岐構造の検出限界について論じた。フラクタル的振動を量子系が良好に再現するには、相空間の微細構造を十分に検出できる分解能を有していることが前提となる。ところが、プランク体積の値が消滅島トーラスの相体積の $1/20$ 以下で、固有状態が十分な分解能を持つと考えられたケースにおいても、 ρ^q が古典系の振動を再現できないケースが相次いだ。本課題ではこの原因に対する分析も進めており、消滅島トーラスに対する量子系の固有状態の局在が依然として不十分で、注目しているエネルギー領域では島トーラスとカオス領域の間を行き来するトンネリング状態が多数存在するためであると考察している。「5.発表論文」でもこの点について固有関数の伏見表示を用いた詳細な解析を試みており、トンネリング状態の半古典的消滅が極めてゆっくり実現することを報じている。

<引用文献>

[1]R.P.Taylor et al.,Phys.Rev.Lett.,78(1997)1952; A.P.Micolich et al., Phys. Rev. Lett., 87(2001)036802
 [2]A.S.Sachrajda,et al.,Phys.Rev.Lett.,80(1998)1948
 [3]A.Budiyono,K.Nakamura,Chaos,Sol.Frac.,17(2003)89;A.Budiyono,K.Nakamura,J.P

hys.Soc.Jpn.,71(2002)2090

[4]Y.Ochiai et al.,J.Phys.Soc.Jpn.72(2003)203; Y.Ochiai et al.,Physica E18(2003)147

[5]H.Hennig et.al.,Phys.Rev.E(Rap.Comm.)76(2007)015202

[6]H.Makino,T.Harayama,Y.Aizawa,Phys.Rev.E63(2001)056203

[7]M.V.Berry, M.Robnik, J.Phys.A17(1984)2413

[8] M. Robnik, Nonlinear Phenom. Complex Syst. 1,1(1998).

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計2件)

Hironori Makino, *Bifurcation and anomalous spectral accumulation in oval billiard*, Progress of Theoretical and Experimental Physics(PTEP), Oxford journals, 査読有、Volume 2019, Issue 7, 2019, DOI:10.1093/ptep/ptz077. (掲載決定 in press)

Hironori Makino, *Self-similar fluctuations of classical origin in level-spacing statistics of quantum lemon billiards*, Progress of Theoretical and Experimental Physics(PTEP), Oxford journals, 査読有、Volume 2018, Issue 7, 2018, pp.073A01, DOI: 10.1093/ptep/pty074

〔学会発表〕(計4件)

① 「量子カオス系の分岐点にみられる強い準位集積の半古典論的解析」牧野浩典 日本物理学会第74回大会 2019年3月 記録有

② 「量子ビリヤード系の準位反発にみられる自己相似振動の研究」牧野浩典 日本物理学会第73回大会 2018年3月 記録有

③ 「量子ビリヤード系の準位統計にみられる自己相似振動の研究」牧野浩典 日本物理学会第72回 2017年3月 記録有

「量子ビリヤード系の準位反発にみられるフラクタル的挙動の研究」牧野浩典 日本物理学会第70回 2015年 記録有

6 . 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。