

令和元年5月23日現在

機関番号：12601
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：15K15942
研究課題名（和文）剛性理論に基づくグラフ実現アルゴリズムの開発

研究課題名（英文）Graph realization problem and graph rigidity

研究代表者

谷川 眞一 (Tanigawa, Shinichi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・准教授

研究者番号：30623540

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：グラフのユークリッド空間への実現可能領域は、elliptopeと呼ばれる凸集合を正射影したものであり、その面構造の解析は凸最適化分野において重要な研究課題である。このelliptopeの正射影と古典的な距離多面体の面構造の関係を明らかにし、その理論を基礎に、グラフ実現問に対する新たな組合せ的アルゴリズムの開発に成功した。

またグラフ実現問題の数理的基盤であるグラフ剛性理論に対してもWhiteleyの多面体大域剛性予想の解決やJackson-Jordanの2次元大域剛性定理の無限周期グラフへの拡張など、重要な成果を得ることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフを入力とする連続最適化問題は、情報科学の様々な場面で見られる話題であり、入力の疎性を利用した高速アルゴリズムの設計は一般的に広く利用される技術である。本研究はグラフの実現問題に対し、入力グラフの代数的・幾何的性質を利用することで、さらに高度で独創的な解法の提案に成功した。

研究成果の概要（英文）：Understanding the facial structure of projections of the elliptopes is a fundamental question in convex optimization. In this study we showed a new connection between projections of the elliptopes and the classical distance polyhedra. Based on this connection, we developed a new combinatorial algorithm for the graph realization problem.

We also obtain a substantial contribution to graph rigidity theory. Among others we affirmatively settled a conjecture by Whiteley concerning the global rigidity of simplicial polytopes.

研究分野：離散最適化

キーワード：グラフの実現問題 グラフ剛性 半正定値計画問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフの実現問題とは指定された辺長を実現するようなグラフのユークリッド空間への埋込みを求める問題である。分子の立体構造やセンサーネットワークの位置同定等、幅広い応用研究に現れる重要な研究課題であり、例えば NMR 等からの観測データから分子の立体構造を同定する問題は 1980 年代から盛んに研究がなされている。

グラフの実現問題は NP 困難な問題であるため、様々な角度からアルゴリズムの開発がなされてきた。その中でも特に重要な成果として Biswas-Ye による半正定値緩和が挙げられる。グラフの実現問題は階数制約付き半正定値計画問題として定式化でき、その半正定値緩和は任意の精度で高次元空間への埋込みを求める。半正定値緩和によって高次元空間への埋込みが高速に求まることは知られているが、高次元埋込みを目的の次元へ落とし込む作業に対して効率的な手法が求められている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、グラフ剛性理論を数理基盤とする、低次元空間埋込み問題に対する精度保証付き高速アルゴリズムの開発を行う事である。またグラフの実現問題は階数制約付き半正定値計画問題の代表例として認知されており、グラフの実現問題に対し得られたアルゴリズム設計理論を階数制約付き半正定値計画問題に一般化することを目指す。

3. 研究の方法

研究代表者のこれまでの剛性理論とアルゴリズム設計理論の知見を基礎に、問題解決の過程を以下の四つの課題に分類し、適切な課題設定のもと、理論展開を行う。

- ・骨組み構造の高次元剛性に対する組合せ的特徴付けの導出。
- ・骨組み構造が多項式時間計算可能な低次元折り畳みを有するための組合せ的条件の導出。
- ・組合せ的条件に基づく(厳密・近似)アルゴリズムの設計。
- ・対称なグラフや無限周期グラフへの展開。

4. 研究成果

グラフ実現アルゴリズムの開発と、その基礎理論であるグラフ剛性理論に関して以下の研究成果を得た。

(1) 球面上へのグラフ実現問題の組合せ的側面の解明に向け、符号付き半正定値行列補完問題を提案し、実行可能領域と距離多面体の面構造の関係を明らかにした。この成果をもとに、グラフが odd-K4 マイナーフリーの場合は、組合せ的多項式時間アルゴリズムで 2 次元球面への実現が求まることを証明した。さらに Arav らによって最近証明された Colin de Verdiere parameter が 2 以下で抑えられる符号付きグラフの特徴づけを系として得た。

(2) グラフ実行可能領域と距離多面体の関係を利用して、半正定値行列補完問題の特異値の解析を行った。Browain and Wolkowicz によって提案された面的縮小法は、グラフの実現問題に対するその有効性が Drusvyatskiy, Pataki, and Wolkowicz によって確認されている。本研究では、面的縮小回数(特異値)が 1 回で抑えられるグラフの特徴づけを与え、Drusvyatskiy, Pataki, and Wolkowicz らの未解決問題を解決した。

(3) 多面体の剛性は Cauchy の剛性定理以降、常にグラフ剛性理論の中心的話題である。Cauchy の定理は単体的凸多面体の 1-skeleton の剛性を主張しているが、Hendrickson によって凸多面体の 1-skeleton は大域剛にはならないことが知られていた。この成果を背景に Whiteley は単体的多面体に辺を挿入したモデルを考え、大域剛性が得られるための必要十分条件を予想した。本研究では、この Whiteley 予想の肯定的解決に成功した。また同様の証明方法で、射影平面やトーラスの三角形分割が大域剛になるための必要十分条件を導出した。

(4) 有限グラフに関する最も基本的な剛性定理として Jackson-Jordan による 2 次元大域剛性の組合せ的特徴づけが知られている。近年、結晶構造などの同定問題を念頭に無限グラフの剛性に関する研究が盛んに行われており、Jackson-Jordan による 2 次元大域剛性の組合せ的特徴づけ定理を無限周期グラフへと拡張することが重要な未解決問題として広く認識されていた。本研究では格子固定の条件の下、Jackson-Jordan の定理が無限周期グラフへと拡張可能であることを証明した。また系として Jackson-Jordan 定理のトーラス空間への拡張が得られた。

(4) 本研究課題の主要な研究対象である行列補完問題やユークリッド行列補完問題において、グラフの完全消去順序の概念が多項式時間可解性に重要な役割を果たしていることが知られている。この完全消去順序の概念の対称行列への一般化を提案し、完全消去順序を有する行列の特徴づけを与えた。この概念は単調な弦グラフの族に対する同時完全消去順序や重み付きグラフの距離保存消去順序などの概念を一般化しており、既存成果の統一的視点を与えることに成功した。一方で、特徴づけに基づく完全消去順序構成の高速アルゴリズムの設計は未完成であり、今後の重要な課題である。

(5)Sitharam らの編集で、グラフ実現問題を中心とした幾何制約システムに関する研究を総括したハンドブック、Handbook of Geometric Constraint Systems Principles が出版された。グラフの実現問題の数学的基盤であるグラフ大域剛性に関する総説論文を当ハンドブックに 2 編執筆した。本研究プロジェクトで得られた成果を中心に、グラフ大域剛性に関する理論的成果と関連するアルゴリズム設計手法を整理・解説し、未解決問題を多数提示した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

1 Tibor Jordan and Shin-ichi Tanigawa: Global rigidity of triangulations with braces, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 136, 249-288, 2019, doi:10.1016/j.jctb.2018.11.003

2 Yaser Eftekhari, Bill Jackson, Anthony Nixon, Bernd Schulze, Shin-ichi Tanigawa, Walter Whiteley: Point-hyperplane frameworks, slider joints, and rigidity preserving transformations, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 135, 44-74, 2018, doi:10.1016/j.jctb.2018.07.008

3 Monique Laurent and Shin-ichi Tanigawa: Perfect elimination orderings of symmetric matrices, Optimization Letters, to appear, 2017, doi.org/10.1007/s11590-017-1213-y.

4 Shin-ichi Tanigawa: Singularity degree of the positive semidefinite matrix completion problem, SIAM Journal on Optimization, 27, 986-1009, 2017. doi.org/10.1137/16M1069262

5 Monique Laurent, Matteo Seminaroti, and Shin-ichi Tanigawa: A structural characterization for certifying Robinsonian matrices, The Electronic Journal of Combinatorics, 24, P2.21, 2017.

〔学会発表〕(計 6 件)

Shin-ichi Tanigawa: Combinatorics of Body-bar-hinge Frameworks, Bond-node structures: rigidity, combinatorics and chemistry, 2018 年

Shin-ichi Tanigawa: Global rigidity of triangulations with braces, 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2017 年

Shin-ichi Tanigawa: Singularity Degree of the Positive Semidefinite Matrix Completion Problem, DIMACS Workshop on Distance Geometry, 2016 年

Shin-ichi Tanigawa: Singularity degree of graphs, Lancaster rigidity meeting, 2016 年

Shin-ichi Tanigawa: On the singularity degree of graphs, 20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS), 2016 年

Shin-ichi Tanigawa: Universal rigidity, singularity degree, and metric polytope, Geometric rigidity theory and applications, 2015 年 5 月

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

総説論文 2 件

1 Bill Jackson, Tibor Jordan, and Shin-ichi Tanigawa: Global rigidity of two-dimensional frameworks, In Handbook of Geometric Constraint Systems Principles, Chapter 21, 2018

2 Csaba Kiraly and Shin-ichi Tanigawa: Rigidity of Body-bar-hinge Frameworks, In Handbook of Geometric Constraint Systems Principles, Chapter 20, 2018

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。