様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：３７４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2016
課題番号：１５Ｋ１５９４５

研究課題名（和文）関数近似を応用した高速近似アルゴリズム

研究課題名（英文）Efficient approximation algorithm design using function approximation

研究代表者
安藤　映（ANDO, Ei）

崇城大学・情報学部・助教

研究者番号：２０５８３５１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：#P-困難と呼ばれるクラスに属する難問３つについて，高速な近似アルゴリズムである完全多項式時間近似スキーム（ＦＰＴＡＳ）を提案した．１つは複数の制約式を持つナップサック多面体の体積，２つ目は幾何双対ナップサック多面体の体積であり，３つ目は閉路を持たない有向グラフ（ＤＡＧ）で辺の長さが一様ランダムである場合の最長路長さの分布関数である．これら３つは独立した技法もあるが，畳み込み積分の階段近似という部分で共通したテクニックを用いる．これらの内容は論文誌Algorithmicaに掲載されたほか，査読付きの国際会議であるWALCOM2017およびCOCOON2017にて発表済み及び発表予定である．

研究成果の概要（英文）：In this research topic, three approximation algorithms have been proposed for the hard problems in the problem class of #P-hard. The three proposed algorithms are all fully polynomial time approximation schemes (FPTASes). First algorithm computes the volume of the knapsack polytope with multiple constraints. Second algorithm computes the volume of the geometric dual of the knapsack polytope. Third algorithm computes the probability distribution function of the longest path length in DAGs with random edge lengths. Although there are distinct techniques in each algorithms, the algorithms share one technique, the staircase approximation of the convolution integrals. One result is published refereed journal Algorithmica. The other results are (going to be) presented in refereed international coferences WALCOM2017 and COCOON2017.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：#P-困難問題　高次元多面体体積　完全多項式時間近似スキーム　FPTAS　近似アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

多次元空間内での多面体の体積を求める問題は，様々な応用をもつ重要な問題である．例えば，一様分布に従って互いに独立な確率変数３つの和の分布関数を考えると３次元ナップサック多面体の体積と一致する．この体積を正確に求める問題は#P-困難と呼ばれる種類の難問であることが知られている．(２次元，３次元の場合の例を図１に示す) n 次元多面体の体積を求める問題それ自体には理論的なチャレンジの余地が十分にある．国内外の研究の動向として，最初は乱択アルゴリズムを用いた近似がよく研究されてきた．その上で,「乱数を用いない決定的なアルゴリズムで，この種の問題を高速に近似できるか」というテーマが注目されている．

２．研究の目的

これまでの研究で得られた手法を応用して，他の#P-困難な問題に対して完全多項式時間近似スキーム(FPTAS)を提案する．これまでの研究で得られたアルゴリズムの設計指針は，他の研究に見られない方法であり，主要な未解決問題に切り込める見込みである．本研究の成果として順序多面体の体積，森多面体の体積を近似計算する手法が見つかる場合が最高の成果である．それらがうまくいかない場合，置換多面体の体積や，閉路のない有向グラフ(DAG)で確率変数の枝長さを考えた場合の最長路長さの分布関数など，他の問題に対する高速近似アルゴリズムの提案を目指す．

３．研究の方法

本研究の提案手法のうち，畳み込み積分の近似というアイディアを適用する方向での近似アルゴリズム設計を模索する．これらの主要な未解決問題に対して解法が見つからない場合は，よりナップサック多面体の体積に近い#P-困難問題について研究を行い，提案手法の特徴を生かしたFPTAS が設計できる問題とそれ以外の問題の切り分けを行う．

４．研究成果

(1) ナップサック多面体は n 次元ハイパーキューブ一つの超平面で切り取ってできる多面体であるが，それを拡張してハイパーキューブを複数超平面で切り取ってできる多面体（複数制約式のナップサック多面体）の体積について FPTAS を提案し，論文誌に掲載されている．

複数制約式のナップサック多面体の体積を求める問題は，入力として k(n+1)個の整数を行列$A \in Z_{+}^{n\times k}$ および$\boldsymbol{b} \in Z_{+}^{k}$が与えられるとき，$\{\boldsymbol{x} \in [0,1]^{n} | A \cdot \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$で与えられる多面体である．

この多面体に対する FPTAS 設計のアイディアは，ハイパーキューブ内の一様ランダムベクトル$\mathbf{X}$を考えたときに確率$\Pr[A \cdot \mathbf{X} \le \mathbf{b}]$と複数制約式のナップサック多面体の体積が一致することである．この点を利用して i 番目の次元までの途中計算結果として k 変数関数$\Psi_{i}(\mathbf{s})$を考えて($\mathbf{s} \in R^{k}$),

$$\Psi_{i}(\mathbf{s}) = \Pr[A^{(i)} \cdot \mathbf{X}^{(i)} \le \mathbf{s}]$$

とする．ここで$A^{(i)}$は$i \times k$行列で，A のi行を取り出した部分行列である．$\mathbf{X}^{(i)}$は$\mathbf{X}$のi番目までの成分からなるi次元行列である．ここで A の i+1 行を$\boldsymbol{a}_{i+1} \in R^{n}$とし，$\mathbf{X}$の第 i+1 成分を$X_{i+1}$とする．すると，

$$\Psi_{i+1}(\mathbf{s}) = \int_{0}^{1} \Pr\left[A^{(i)} \cdot \mathbf{X}^{(i)} \le \mathbf{s} - x\boldsymbol{a}_{i+1}\right] dx$$

$$= \int_{0}^{1} \Psi_{i}(\boldsymbol{s} - x\boldsymbol{a}_{i+1}) dx.$$

このように畳み込み積分の繰り返しで複数制約式のナップサック多面体体積を表すことができ，$\Psi_{n}(\boldsymbol{b})$が求める体積である．ただし，この畳み込み積分を厳密に計算することは困難である．

解決策として被積分関数を階段近似する．階段はΨ_{i}が k 変数関数であるので各変数の方向に M 段ずつ分割したM^{k}個の階段を考える．図 1 に 2 変数関数を M^2 個の階段で近似した場合の例を示す．この階段近似の近似比を詳しく評価すると，k が定数であれば複数制約式のナップサック多面体の体積に対する FPTAS であることが示せた．

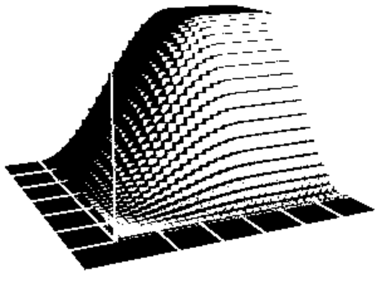

図１．２変数関数の場合の階段近似

なお，より多くの制約式に対して高速に動作するアルゴリズムが存在しうるかどうかは今後の課題である．

(2) 幾何双対ナップサック多面体の体積に対する FPTAS を提案して Lectures on Computer Science に採録決定した.幾何双対ナップサック多面体は，Khachiyan によって#P-困難であることが示された多面体である．これに対し，畳み込み積分の近似というアイディアを用いた FPTAS を提案した．

幾何双対ナップサック多面体は n 次元の正

軸体ともう一つの n 次元空間内の点の凸包を取ってできる多面体である．正軸体は三次元では正八面体として知られている．n 次元正軸体は$i = 1,\ldots,n$について i 番目の規定ベクトル$\mathbf{e}_i$を用いて$\pm\mathbf{e}_1,\ldots,\pm\mathbf{e}_n$の凸包として与えられる．

提案するアルゴリズムの考え方は次のようなものである．問題として与えられる n 次元の点を$\boldsymbol{a} \in \mathrm{R}^n$とする．ここで，原点を中心とする正軸体とは別にもう一つの正軸体を考える．この正軸体は適当な 1 よりわずかに小さな値βを使って中心座標を$(1-\beta)\boldsymbol{a}$とし，半径をβとする正軸体とする．この正軸体を第二の正軸体と呼ぶことにして，同様の比率で$\boldsymbol{a}$に向かって無限に正軸体を並べることを考える．つまり，第 i 番目の正軸体は中心座標が$(1-\beta^{i-1})\boldsymbol{a}$であって，半径が$\beta^{i-1}$である．この正軸体の列を続けると$\boldsymbol{a}$に収束する．図２にこの正軸体の列について２次元で描画した図を示す．

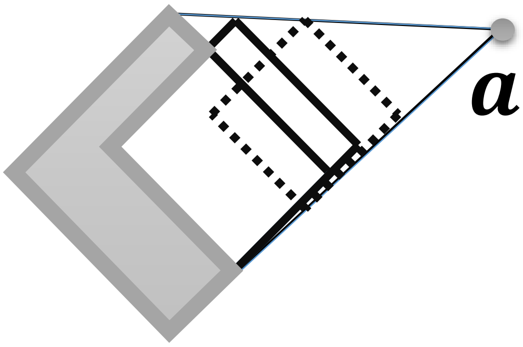

図２． 正軸体の列による近似

無限に続くこの正軸体の列は i=0 以降と i=1 以降とで互いに相似である．提案するアルゴリズムは第一の正軸体と第二の正軸体の差分の体積を計算し，無限級数の和の公式によって全体の体積の近似値とするものである．

この差分の体積を計算すること自体も実は#P-困難である．この問題に対して，ナップサック多面体の体積を近似するときに用いた畳み込み積分の近似を用いることができる．中心の座標が$\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n) \in$ R^nで与えられて半径rの正軸体$C(\mathbf{c}, r)$は次の不等式を満たす点$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{R}^n$の集合として表現できる：

$$\sum_{i=1,\ldots,n} |x_i - c_i| \le r.$$

すると，二つの正軸体$C(0,1)$と$C((1-\beta)\boldsymbol{a},\beta)$の重なり部分の体積は$[-1,1]^n$内の一様ランダムベクトル$\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$を用いて確率

$$\Pr\left[\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{i=1,\ldots,n} |X_i| \le 1 \wedge \\ \displaystyle\sum_{i=1,\ldots,n} |X_i - (1-\beta)a_i| \le \beta\end{array}\right]$$

の2^n倍と等しい値である．するとこの確率は先に述べた複数制約式のナップサック多面体の体積と同様の手法によって計算できる．適切なβを選択して第一の正軸体$C(0,1)$と第二の正軸体$C((1-\beta)\boldsymbol{a},\beta)$の共通部分の体積を計算してから$C(0,1)$の体積から引き算することによって差分の体積を得る．以上の計算を適切に行うことで，幾何双対ナップサック多面体の体積を求める問題に対する FPTAS であることが示せた．

正軸体に複数点を追加して凸包を取った多面体の体積も興味深い問題であり今後の課題である．

(3) 閉路のない有向グラフ (Directed Acyclic Graph, DAG) の各辺について互いに独立で一様分布に従うランダム辺長さが与えられる場合に，すべての路が長さ制約を満たす確率を求める問題も多面体の体積とみなすこともでき，#P-完全問題である．この問題は半導体で作られる論理回路の信号遅延解析に応用がある DAG の形状を示すパス幅というパラメータが定数以内である場合に，すべての路の長さがある値 x 以下である確率を求める問題に対して FPTAS が存在することを示し，Lecture Notes on Computer Science に採録されている．

頂点集合 V，辺集合 E のグラフ G=(V,E) が与えられたとき，グラフ内の路の集合をΠ，辺 e の重みを確率変数$X_e \in [0,1]$とするとこの確率は

$$\Pr\left[\bigwedge_{\pi\in\Pi}\sum_{e\in\pi} a_e X_e \le x\right]$$

という式で与えることができる．この時，$e \in E$についてa_eは正の整数で辺eの重みの範囲を$[0, a_e]$とする．この問題は$|E|$次元のハイパーキューブを最大で指数個の路の数だけある制約式で切り取った多面体であると言える．

このアルゴリズムのアイディアは，まず与えられたグラフ G をパス分解して，そのパス分解されて得られるバッグ毎に最長路長さの分布関数を計算することである．すると，パス幅が限定されているという条件によって，バッグ毎の最長路長さの分布関数は高々定数個の変数で与えられる関数である．それらの関数を階段近似したものを計算機のメモリ上に保持しておき，畳み込み積分を複数変数に拡張した式を用いてバッグの最長路長さ分布関数２つを合成して一つの最長路長さ分布関数得て，しかもその変数の数は高々定数とすることができる．この計算を繰り返すことによってグラフ G 全体の最長路長さの分布関数を得ることができる．

アルゴリズムの近似比を評価する際には次の２点が重要である．１点目は，階段近似であるので元の関数を「水平方向」に移動した関数を用いることで近似の上界を得ることができる点である．もう１点は，水平方向に移

動した量を理論的に抑えることと，一様分布に従う枝長さであることの２点を用いて図３のように考えることでアルゴリズムの近似比を証明できる．

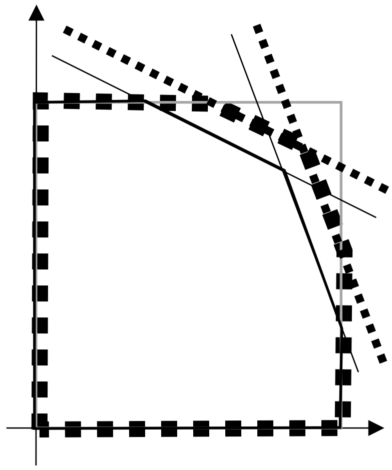

図３．　近似比証明の考え方

図３は問題を２次元の場合に単純化したものである．実際に計算したい値はグレーの実線で表されたハイパーキューブ（図中は正方形）を黒の実線で表された実線で切り取ってできる多面体の体積である．それを計算することはｎ次元空間内では困難であり，代わりに提案アルゴリズムは点線で表された多面体の体積を出力する．実線の場合と点線の場合の違いは，ハイパーキューブを切り取る超平面を，原点から遠ざかる方向へずらしてある点である．すると，実線で表された多面体を，面を表す式によって分割すれば，錘の集合とみなすことができる．すると，近似によって遠ざかる超平面を底面とする錘を近似前の多面体から少しだけ拡大し，それ以外の錘をそのままとすれば，近似後の多面体を覆う多面体が得られる．証明ではこの近似後の多面体を覆う別の多面体の体積がもとの多面体の体積の$1+\epsilon$倍に収まっていることを示す．なお，この証明中の錘はアルゴリズムで計算するわけではないため，ハイパーキューブを切断する超平面が多数ある場合にも適用できる．

(4)　本研究で当初目標とした順序多面体および森多面体に関しては FPTAS を構成するにはまだ他のアイディアが必要であり，今後も研究を続けたい．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

[1] An FPTAS for the Volume of Some V-polytope ---It is Hard to Compute The Volume of The Intersection of Two Cross-polytopes, Ei Ando, Shuji Kijima, COCOON 2017, LNCS, accepted. (査読有)
URL: https://arxiv.org/abs/1607.06173

[2] An FPTAS for Computing the Distribution Function of the Longest Path Length in DAGs with Uniformly Distributed Edge Lengths, E. Ando, WALCOM2017, LNCS 10167, pp 421--432, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-53925-6_33 (査読有)

[3] An FPTAS for The Volume Computation of 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution, E. Ando, S. Kijima, Algorithmica, Volume 76, Issue 4, pp 1245--1263, 2016, DOI:10.1007/s00453-015-0096-5 (査読有)

〔学会発表〕（計４件）

[1] 幾何双対ナップサック多面体の体積のための FPTAS, 安藤 映, 来嶋 秀治,第１５７回アルゴリズム研究会, 2016 年 3 月 6 日，電気通信大学（東京都調布市）
(2017 年 3 月 16 日情報処理学会　山下記念研究賞を受賞)

[2] 幾何双対ナップサック多面体の体積に対する FPTAS, 安藤 映, 情報系 WinterFesta, 2015 年 12 月 22～23 日一橋講堂（東京都千代田区）

[3] 負パラメータを含む制約つきナップサック多面体の体積に関する考察, 安藤 映, 来嶋秀治, 第１５４回アルゴリズム研究会, 2015 年 9 月 28 日九大西新プラザ（福岡市早良区）

[4] ナップサック多面体の体積に対するＦＰＴＡＳとその拡張について, 安藤 映, 日本オペレーションズ・リサーチ学会九州支部, 2015 年 7 月 8 日, 長崎大学（長崎県長崎市）

[5] An FPTAS for the Volume Computation of Multiply Constrained 0-1 Knapsack Polytopes Based on Approximate Convolution, E. Ando and S. Kijima, The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, June 2-5, 2015, Sawara_ku, Fukuoka, Japan.

〔その他〕
ホームページ等 http://www.cis.sojo-u.ac.jp/~ando-ei/research.html

６．研究組織

(1)研究代表者

安藤　映（ANDO Ei）
崇城大学，情報学部，助教．
研究者番号：20583511