

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：14201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2016

課題番号：15K17090

研究課題名(和文) 無裁定価格理論に基づく債券・株式のリスクプレミアムの同時推定

研究課題名(英文) Simultaneous estimates of stock and bond risk premiums based on a no-arbitrage pricing model

研究代表者

菊池 健太郎(Kikuchi, Kentaro)

滋賀大学・経済学部・准教授

研究者番号：60738368

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円

研究成果の概要(和文)：債券と株式のリスクプレミアムの同時推定は、市場環境を反映した価格モデルにより行うことが望ましい。しかし、先行研究のモデルでは、名目金利や配当利回りの非負性が保証されないなど、2008年に発生した金融危機以降の低金利環境を捉えることができない。本研究では、無裁定価格理論の枠組みの下、名目金利や配当利回りの非負性が保証され、価格ボラティリティが変動する、低金利環境を捉える債券と株式の同時価格付けモデルの構築を行った。さらに、米国の株式指数、国債金利のデータを用いて同モデルの推定を行い、債券や株式のリスクプレミアムの変動について解釈・考察を加えた。

研究成果の概要(英文)：In estimating bond and stock risk premiums simultaneously, it is desirable to use a pricing model which allows to take into account developments in financial markets. However, models proposed in the previous studies do not ensure the non-negativity of nominal interest rates and dividend yield. This means that it is difficult for these models to capture the low-interest rate environment since 2008. In this study, we constructed a joint pricing model of stocks and bonds which ensures the non-negativity of nominal interest rates and dividend yield and has the time-varying price volatility. Furthermore, we gave some interpretations of the bond and stock risk premium estimates in an empirical analysis of our proposed model using U.S. stock index and government bond interest rates.

研究分野：経済統計学

キーワード：無裁定価格理論 金利期間構造モデル 配当割引モデル リスクプレミアム 量的緩和政策

### 1. 研究開始当初の背景

金融資産のリスクプレミアムを推定することは、投資家がポートフォリオ最適化を行う場合だけでなく、中央銀行が金融政策の有効性を判断するうえで重要である。金融実務の実用に耐えうる推定には、市場環境を反映した価格モデルが必要になる。さらに、金融資産価格間の依存関係がリスクプレミアムにもたらす効果を捉えるためには、複数の金融資産価格を統一的な枠組みの下で同時に扱う価格モデルを用いて推定を行うことが望ましい。

債券と株式の価格を統一的な枠組みの下でモデル化する先行研究は限定的であるが存在する (Bekaert and Grenadier [2001]、Mamaysky [2002])。しかし、いずれの研究も名目金利が負値を取る可能性を排除していない。したがって、先行研究で提案されたモデルでは、短期金利がゼロ近傍の水準で推移していた近年の米国のような市場環境を捉えることができない。また、先行研究で提案されたモデルは、価格ボラティリティが一定のモデルとなっている。このようなモデルでは、リーマンショックや欧州債務危機といった市場の価格変動が急上昇する動きを表現できないという問題もある。

以上の点を踏まえると、低金利環境における金融実務の実用に耐えうるリスクプレミアムの推定には、名目金利の非負性が保証され、価格ボラティリティが変動する、債券と株式の同時価格付けモデルの構築が必要と考えられる。

### 2. 研究の目的

債券と株式の価格を統一的な枠組みの下で同時に扱うモデルの構築は、Bekaert and Grenadier [2001]、Mamaysky [2002]等によって行われてきた。例えば、Mamaysky [2002]のモデルでは、短期金利がガウシアン過程に従う複数の変数 (ファクター) のアフィン関数として定まるとの仮定を置いている。無裁定条件を課すと、長期金利はファクターのアフィン関数となる。さらに、株式の配当がファクターのアフィン関数とその指数関数の積になると仮定し、無裁定条件から、株価も同様の表現を持つことを導出している。当該モデルは、長期金利と株価の変動を、複数のファクターの動きを通じて捉えられる利点を有する。しかし、幾つか問題も抱えている。まず、名目金利や配当利回りが負の値をとることを排除していない点である。同モデルでは、将来の長期金利や配当利回りの確率分布が

正規分布に従うため、負値をとる確率が市場参加者の想定よりも過大になる。これは、2008年以降の先進諸国の超低金利環境では無視し得ないモデルの問題点である。さらなる問題点として、債券と株式の価格変動のボラティリティが一定であることが挙げられる。リーマンショックや欧州債務危機時には価格ボラティリティが急上昇した。リスク性資産のリスクプレミアム上昇の一因はこの点にある。したがって、ボラティリティを一定と仮定するモデルでは、金融危機以降に散見されてきた、ボラティリティ上昇局面でのリスクプレミアムの上昇を適切に捉えることができないという問題がある。

以上のような先行研究の問題点を踏まえ、本研究では、名目金利と配当利回りの非負性を保証し、価格ボラティリティが時間変動する債券と株式の同時価格評価モデルを構築する。モデルを構築した後には、米国の国債金利や株式指数のデータを用いて、モデルパラメータの推定を行い、観測値への推定誤差の妥当性を検証する。さらに、パラメータ推定値を用いて債券や株式のリスクプレミアムを推定し、これらの変動について解釈・考察を加える。

### 3. 研究の方法

(1)モデルの構築: 本研究では、連続時間無裁定価格理論の上にモデルを構築する。モデルの構築は、金利期間構造モデルの設定し、同モデルと整合的な割引配当のリスク中立測度下での期待値として株価を表現し、株価の解析表現 (もしくは準解析表現) を得ることの3つの部分からなる。まず、金利期間構造モデルとして、Leippold and Wu [2003]などによって研究された、ガウシアン過程に従うファクターの2次形式によって短期金利を定義する「2次ガウシアン金利期間構造モデル」を扱う。同モデルは、名目金利の非負性を保証する。次に、株式から連続的に支払われる配当がファクターの2次形式とその指数関数の積で定まると仮定する。この仮定に基づき、2次ガウシアン金利期間構造モデルと整合的な割引配当のリスク中立確率測度下での期待値として株価を表す。そして、同式にファイマン=カックの公式を適用し、株価が満たす偏微分方程式を導出する。ここから、解の候補として、株価の具体的な関数表現を推察し、偏微分方程式に代入することで、関数表現を定める係数が満たすべき方程式を導出する。本研究では、同方程式が解を持つための十分条件を明らかにする。

(2)モデルの推定: 本研究では、金利や株価を定めるファクターとして潜在変数を扱う。これにより、モデルの推定はモデルパラメータと潜在変数の同時推定が必要になる。連続時間モデルを時間に関して離散化すると、モデルの状態空間表現が得られる。観測方程式が非線形であるため、非線形カルマンフィルタの1つである無香料カルマンフィルタ(Julier and Uhlmann [1997])を援用して潜在変数の推定を行う。これと疑似最尤法を組み合わせることでモデルパラメータの推定を行う。観測値として、米国の株価指数(S&P500)とその配当利回り、短期から長期の年限の米国債ゼロクーポン金利を用いる。これらのデータのうち、株価指数と配当利回りはShiller教授(イェール大)のホームページ、ゼロクーポン金利はFRBのホームページから取得する。潜在変数とモデルパラメータの推定値から、観測値に対する推定誤差を計算し、その度合いを評価する。さらに、モデルパラメータと潜在変数の推定値をもとに、債券と株式のリスクプレミアムを計算し、リスクプレミアムが米国の量的緩和政策期にどのような変動を示していたのか、それらの変動の仕方について解釈を加える。また、両リスクプレミアムとも、投資期間に応じたリスクプレミアムを定義できる。そこで、シミュレーションにより様々な年限のリスクプレミアムを計算し、時期に応じて債券や株式のリスクプレミアムの期間構造の水準や形状がどのような特徴をもっていたのかなども分析する。

#### 4. 研究成果

(1)モデルの構築: 本研究では、債券価格は2次ガウシアン金利期間構造モデルに則ると仮定する。また、株式の配当は潜在変数の2次形式とその指数関数の積で表されると仮定する。そして、株価を2次ガウシアン期間構造モデルと整合的な割引率を持つリスク中立測度下での割引配当の期待値として定義した。同定義式にファインマン=カックの公式を適用すると、株価に関する偏微分方程式が得られるが、株価が潜在変数の2次形式とその指数関数の積の形式の解析表現を持つことが推察される。この関数表現を、得られた偏微分方程式に代入することで、関数表現を定める係数ベクトルや行列が、代数リッカチ方程式を含むある連立代数方程式を満たす必要があることが分かった。本研究では、さらに、当該連立代数方程式が一意的解を持つための十分条件、すなわち、潜在変数の確

率過程、短期金利、配当利回りを定めるパラメータに課すべき条件を明らかにした。以上のように、モデルパラメータに課された条件と無裁定条件などの種々の仮定の下、名目金利と配当利回りの非負性が保証される、債券と株式価格の潜在変数による解析表現を得た。さらに、これらの価格の解析表現から、債券、株式それぞれの瞬間リスクプレミアムの潜在変数による解析表現も得た。構築されたモデルは、金融危機以降の低金利環境での資産価格変動を表現できるだけでなく、金融資産価格間の依存関係を潜在変数の変動を通じて動的に捉えることができることから、金融実務への実用に資するものと考えられる。

以上の結果を論文“Quadratic Gaussian Joint Pricing Model for Stocks and Bonds: Theory and Empirical Analysis”にまとめ、査読付き国際プロシーディングス“Recent Advances in Financial Engineering 2014”に投稿し、2016年度に掲載された。

(2)モデルの推定: 構築したモデルに基づく実証分析を行った。使用したデータは、1992年1月~2016年1月の米国の株式指数(S&P500)とその配当利回り、短期年限から長期年限(6か月、2年、5年、7年、10年)の米国債のゼロクーポン金利の月次データである。モデルの観測方程式が非線形であるため、無香料カルマンフィルタと疑似最尤法を組み合わせ、潜在変数とモデルパラメータの同時推定を行った。推定誤差をみると、ゼロクーポン金利は、どの年限とも平均絶対誤差でみて20ベースポイント以内に収まった。株式指数の配当利回りの平均絶対誤差は3ベースポイントとなった。株価指数の平均絶対誤差率は2.5%となり、いずれも推定値が観測値へ高精度でフィットしていることが確認された。この結果は、金融危機以降の低金利環境における債券と株式の実証分析において、構築したモデルが有効であることを示唆するものである。

また、推定により得られたパラメータや潜在変数をもとに、米国債と株式のリスクプレミアムを推定したところ、債券のリスクプレミアムは量的緩和政策(QE)中に大幅に低下し、QE縮小~終了後は僅かな上昇に止まっていることが分かった。これは、QEの縮小~終了によって、米国債市場の不確実性が特段高まっていなかったことを示している。また、

QE縮小が金融市場で意識され始めた2013年以降、短期的な株式リスクプレミアムが大

幅に上昇する一方、長期的な株式リスクプレミアムは殆ど変動がないことが分かった。これは、QE 縮小～終了が短期的には株式市場にとっての不確実要因であるが長期的にはそうではないと市場が認識していると解釈される。さらに、2016年初の株式リスクプレミアムの期間構造は、IT バブルさなか(2000年初)や金融危機前の2007年春の水準よりも高水準となっていることなども分かった。

以上の実証分析の結果を学会(計6回)で報告し、論文“Estimating U.S. Equity and Bond Risk Premiums using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model”にまとめ、現在、国際学術誌に投稿中である。

#### [引用文献]

Bekaert, G, and S. Grenadier. “Stock and bond pricing in an affine economy,” working paper, Stanford University, 2001.

Julier, S. J. and J. K. Uhlmann. “A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems,” in *Proc. AeroSense: 11th Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, 1997, pp.182–193.

Leippold, M, and L. Wu. “Design and estimation of quadratic term structure models,” *European Finance Review* 7(1), 2003, pp. 47-73.

Mamaysky, H. “On the joint pricing of stocks and bonds: Theory and evidence,” working paper, Yale School of Management, 2002.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### [雑誌論文](計2件)

Kentaro Kikuchi, “Quadratic Gaussian Joint Pricing Model for Stocks and Bonds: Theory and Empirical Analysis,” *Recent Advances in Financial Engineering 2014, Proceedings of the TMU Finance Workshop 2014*, World Scientific, 2016, pp.107-131. 査読有.  
DOI: 10.1142/9789814730778\_0006

Kentaro Kikuchi, “Estimating U.S. Equity and Bond Risk Premiums using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model,” *Proceedings of the 11th Asia-Pacific Conference on Global Business, Economics, Finance and Business Management (AP17Thai Conference)*, 2017, 査読無し.URL:  
[http://globalbizresearch.org/Bangkok\\_Thailand\\_Conference\\_2017\\_feb1/docs/doc/2.%20Finance,%20Account%20&%20Banking/T724.pdf](http://globalbizresearch.org/Bangkok_Thailand_Conference_2017_feb1/docs/doc/2.%20Finance,%20Account%20&%20Banking/T724.pdf)

#### [学会発表](計6件)

菊池健太郎, Estimating the U.S. Equity and Bond Risk Premiums Using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, 第43回夏季JAFEE大会, 2015年8月, 中央大学市谷田町キャンパス

Kentaro Kikuchi, The U.S. Equity and Bond Risk Premiums in a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, *Quantitative Methods in Finance 2015*, 2015年12月, シドニー

Kentaro Kikuchi, Risk Premium Estimation for U.S. Stocks and Bonds using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, *The Fourth Asian Quantitative Finance Conference*, 2016年2月, 大阪大学中之島キャンパス

菊池健太郎, Risk Premium Estimation for U.S. Stocks and Bonds using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, *日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会*, 2016年3月, 慶應義塾大学矢上キャンパス

Kentaro Kikuchi, Estimating the U.S. Equity and Bond Risk Premiums Using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, *11th Asia-Pacific Conference on Global Business, Economics, Finance and Business Management*, 2017年2月, バンコク

Kentaro Kikuchi, Estimating the U.S. Equity and Bond Risk Premiums Using a Quadratic Gaussian Joint Pricing Model, *9th International Finance Conference*, 2017年3月, パリ

#### [図書](計0件)

#### [産業財産権]

#### 出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

#### 取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

URL:

[http://researchers.shiga-u.ac.jp/html/100002441\\_ja.html](http://researchers.shiga-u.ac.jp/html/100002441_ja.html)

6．研究組織

(1)研究代表者

菊池健太郎 (KIKUCHI Kentaro)

滋賀大学・経済学部・准教授

研究者番号：60738368

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：

(4)研究協力者

( )