様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１４２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５０８

研究課題名（和文）超特異ドリンフェルト・モジュラー多様体の体系的な構成

研究課題名（英文）Systematic constructions of supersingular Drinfeld modules

研究代表者
長谷川　武博（Hasegawa, Takehiro）

滋賀大学・教育学部・准教授

研究者番号：８０４０９６１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：（１）任意ランクのドリンフェルト加群の係数を明示的に与えた．その結果を応用し，ドリンフェルト加群が「超特異的」であるための必要十分条件を，係数を用いて与えた．実際，ランク２とランク３の場合に，互いに同型でない超特異ドリンフェルト加群を具体的にいくつか定義した．
（２）ランク２のドリンフェルト加群の係数を，（１）の結果よりさらに明示的に与えた．その結果を応用し，有限体上の関数体の漸近的最良塔を構成した．

研究成果の概要（英文）：(1) I gave explicitly the coefficients of supersingular Drinleld modules of arbitrary rank. By using this result, I proved a necessary and sufficient condition for supersingularity. Moreover, I computed several rank-2 (resp. rank-3) supersingular Drinfeld modules, which are not isomorphic each other.
(2) I gave explicitly the coefficients of rank-2 supersingular Drinleld modules, which is more explicitly than (1). As its application, I constructed an asymptotically optimal towers over finite fields.

研究分野：代数学

キーワード：超特異ドリンフェルト加群　ドリンフェルト加群　超特異多項式　超特異点　有限体上の関数体の塔　関数体の塔　有限体

１．研究開始当初の背景

rank-2 ドリンフェルト加群の超特異多項式については（1）（2）（3）（4）である．

（1） 1941 年に Deuring は，超特異多項式（ドイリング多項式）を定義し，それを用いて，ルジャンドル楕円曲線が超特異的である必要十分条件を与えた．正確には，楕円曲線が超特異的である必要十分条件が，二つの零点０と１以外のもう一つの零点がドイリング多項式の根となることを示した．

（2）1983 年に Gekeler [G83] は，rank-2 ドリンフェルト加群論が「楕円曲線論」の関数体類似であることに着目し，（1）の結果を，ある rank-2 ドリンフェルト加群の場合に一般化（関数体化）した．正確には，rank-2 ドリンフェルト加群が超特異的である必要十分条件を証明した．ただし，ここでは超特異多項式は明示的には与えず，おおよその形を与えただけであった．その後，2013 年に El-Guindy と Papanikolas [EP13] は，shadowed partitions という概念を定義し，それを用いて，Gekeler 多項式を多少整頓した．しかし，これは，本研究の立場からは，まだ明示的とは言えないものであった．一方，2014 年に El-Guindy [E14] は, Gekeler とは異なる，ある rank-2 ドリンフェルト加群の超特異多項式を明示的に定義し，それを用いて，超特異的である必要十分条件を証明した. ところが, その証明方法は, El-Guindy 多項式にしか機能しないものであった．

（3）2011 年に Bassa と Beelen [BB] は，上述の流れとは独立に，超特異多項式モドキを定義し，それを用いて，関数体の漸近的最良塔を構成した．しかし，証明にはギャップがあった．具体的には，Bassa- Beelen 多項式の根が基礎体のある拡大体に含まれることを主張する証明にギャップがあった．

rank-3 以上のドリンフェルト加群の超特異多項式族については（4）（5）である．

（4） 2010 年および 2013 年に報告者は，（1）の結果を，ある曲線の場合に，アーベル多様体（正確には，曲線のヤコビ多様体）を用いて，一般化（高次元化）した．具体的には，ドイリング多項式とは異なる，超特異多項式族を定義し，それらを用いて，ある曲線が超特異的である必要十分条件を与えた．

（5）研究開始当初は，rank-2 ドリンフェルト加群の超特異多項式については，上述のように，いろいろ研究されていたが，rank-3 以上のドリンフェルト加群の超特異多項式族については，「アーベル多様体論・ヤコビ多様体論」の関数体類似であるにもかかわらず，それほど研究されていなかった．

２．研究の目的

おおざっぱには（1）と（2）である．

（1）目的の一つは，研究開始当初の背景（3）の Bassa と Beelen のギャップを補完し，高性能符号を構成することであった．漸近最良塔の研究は，1995 年に Garcia と Stichtenoth により始まり，Elkies により「モジュラー曲線」に対応することが知られ，理論的に浅い楕円モジュラー曲線を用いていろいろ構成された．ところが，楕円モジュラー曲線は，基礎体が素体の二次拡大なので，高性能符号が構成できないことがわかってきた．そこで，ドリンフェルト・モジュラー曲線を用いることが提案されたが，ドリンフェルト・モジュラー曲線は理論的に深いので，なかなか掘り当てられなかった．2011 年に Bassa と Beelen により掘り当てられたが，証明にギャップがあった．具体的には，多項式の根が含まれる有限体を決定する部分にギャップがあった．原因は，かれらが由緒正しい超特異多項式を用いず，超特異多項式モドキを用いたことによる．rank-2 超特異ドリンフェルト加群は，基礎体の二次拡大体上定義されるので，超特異多項式の根も基礎体の二次拡大体に含まれる．ところが，一般の多項式の根は制御不能で，Bassa-Beelen 多項式の根も制御不能であった．報告者は，由緒正しい超特異多項式を用いて，かれらのアイデアを復活させようとした．そのためには，任意の rank-2 ドリンフェルト加群の超特異多項式を明示的に書き下す必要があった．ドリンフェルト加群の形を特別なものに制限してしまうと，研究開始当初の背景（2）のように，明示的に書き下せたとしても，関数体の塔の理論には応用できない．

（2）rank-3 ドリンフェルト加群の超特異多項式族が明示的に書き下せれば，「未解決問題」の一つが解決される．ここで，未解決問題とは，伊原康隆さんによって定義された，ある定数（伊原定数）の値を正確に求めることである．つまり，もう一つの研究目的は，伊原定数の決定であった．具体的には，あるドリンフェルト・モジュラー曲面の塔の超特異点の個数を正確に求めることである．伊原定数は上下からそれぞれ評価されているが，上下の評価の間には差がある．数値実験により，下からの評価に一致すると信じられているが，未解決である．もし rank-3 ドリンフェルト加群の超特異多項式族が明示的に書き下せれば，あるドリンフェルト・モジュラー曲面の塔の超特異点の個数が正確にわかり，伊原定数の上からの評価が改良される．さらに，もし任意 rank のドリンフェルト加群の超特異多項式族が明示的に書き下せれば，伊原定数において，いま知られていることよりもずっと先のことまでいろいろ多くのことがわかったり，予想できたりする．

３．研究の方法

研究目的（１）の Bassa と Beelen の証明のギャップを埋めた方法について述べる．

（１）Bassa-Beelen 多項式のメリットは，多項式そのものは明示的ではないが，漸化式によって定義されているので，関数体の塔の超特異点の数え上げに応用しやすいことで，デメリットは，多項式の根が制御できないことであった．これが致命傷になった．一方，由緒正しい多項式のメリットは，根の制御ができることで，デメリットは，明示的でもなければ，漸化式もないことであった．

（２）由緒正しい多項式を明示的に書き下すことが必要になる．以下の方法（あ）（い）をとった．（あ）標数０の整数環上の多変数多項式恒等式を証明する．この恒等式はいままでに知られているものではない．証明は，組合せ論的で，単項式ごとに整理整頓し，打ち消されるものと，生き残るものにわけて証明した．（い）多変数多項式恒等式の変数を特殊化し，modulo 素数すれば，超特異多項式が明示的に書き下せる．証明のアイデアは，いきなり超特異多項式を整頓するのではなくて，整数環のところでさきに計算しておいて，最後に modulo するところにある．有限体上では打ち消しの仕組みが見えないが，整数環上ではそれが見えることを利用した．

（２）（１）において，由緒正しい多項式が明示的に書き下せたので，次のステップは，多項式が分離的であることを示すことであった．Bassa-Beelen 多項式の場合は，漸化式があったので，かれらはそれを用いていた．由緒正しい多項式では，漸化式は用いず，背理法によって証明した．形が明示的にわかっているので，この証明方法が機能した．

（３）第３ステップは，関数体の塔において超特異点が上層階に持ち上がることを証明することであった．そのためには，超特異多項式間に漸化式を作る必要がある．ここでも（１）のアイデアを使った．つまり，有限体上の多項式をそのまま扱わず，整数環上の多項式にリフトアップし，漸化式を証明しておいて，その後 modulo する．このアイデアはもともと Bassa と Beelen のアイデアで，かれらとほぼ同じ方法を用いて証明した．

（４）最後のステップは，（３）の漸化式に，報告者が過去に発見した方法を合わせて超特異点の個数を数え上げることであった．

以下では，研究目的（２）にある，ある伊原定数の値を決定した方法について述べる．

（５）伊原定数とは，おおよそモジュラー多様体の塔の超特異点の個数にあたるもので，基礎体の位数が平方数の場合は，1960 年代に伊原康隆さんによりすでに決定されている．ところが，基礎体の位数が平方数でない場合は未解決で，上下からの評価は知られているが，それらの差は大きい．基礎体の位数が３乗数のときは，下からの評価は，2005 年に Bezerra と Garcia と Stichtenoth により，関数体の塔の超特異点の個数をおおざっぱに数え上げることで与えられた．正確に数え上げるためには，ドリンフェルト・モジュラー曲面の塔の超特異点の個数を数えることになるが，未解決である．そこで，報告者は，ドリンフェルト・モジュラー曲面の超特異点は，超特異多項式族の共通根であることに着目し，多項式族を明示的に書き下し，数え上げることにした．（１）により，一つは明示的に書けているが，残りの多項式族はまだ明示的には書かれていない．報告者は，今回はドリンフェルト加群の関数等式を用いて，多少整理整頓したが，もっと明示的に書き下せると考えている．基礎体が小さい位数の場合は，今回の結果でも数値計算は十分可能なので，実際に超特異点を数え上げた．

４．研究成果

（１）研究成果の一つは，Bassa と Beelen のギャップを修正し，ドリンフェルト・モジュラー曲線の塔に対応する漸近最良塔を構成したことである．その際に，rank-2 超特異ドリンフェルト加群を数え上げる超特異多項式を明示的に書き下したことで，いくつか副産物が得られた．超特異楕円曲線を数え上げるドイリング多項式は，超幾何関数の打ち切り多項式に一致することが知られている．ところが，「関数体版」の超幾何多項式は未発見である．副産物の一つ目は，「関数体版」超幾何多項式のおおよその形が見えたことである．二つ目の副産物は，Bassa-Beelen 多項式と，報告者の超特異多項式との「ズレ」をはっきりさせたことである．これは El-Guindy と Papanikolas によって得られた「関数体版」対数関数の係数を経由することによってなされ，結果的に，上述の三者の関係をはっきりさせることができた．この三者関係によって，直接証明はできないが，結果的に，Bassa-Beelen 多項式の根も制御できることがわかった．

（２）研究成果のもう一つは，基礎体の位数が小さい場合に，rank-3 超特異ドリンフェルト加群を数え上げたことである．言い換えると，あるドリンフェルト・モジュラー曲面の超特異点を数え上げたことである．この結果と Gekeler の Mass formula の結果とを合わせると，報告者は超特異点を数えもらさず，数え上げたことがわかる．ドリンフェルト・モジュラー曲面の塔を構成し，各階において，超特異点を数え上げれば伊原定数を決定することができる．直前までやった．

参考文献

[G83] Ernst-Ulrich Gekeler, Zur Arithmetik von Drinfel′d-Moduln, Ann. 262 (1983), no. 2, 167-182.

[EP13] Ahmad El-Guindy, Matthew A. Papanikolas, Explicit formulas for Drinfeld modules and their periods, J. Number Theory 133 (2013), no. 6, 1864-1886.

[E14] Ahmad El-Guindy, Legendre Drinfeld modules and universal supersingular polynomials, Int. J. Number Theory 10 (2014), no. 5, 1277-1289.

[BB] Alp Bassa, Peter Beelen, Explicit equations for Drinfeld modular towers, arXiv:1110.6076, 2011.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

（１）Takehiro Hasegawa, Seiken Saito,
A generalization of the graph theory prime-number theorem of a finite graph,
International Journal of Mathematics, **査読有**, Vol. 26, No. 9, 2015, 1550071, 19 pp.
DOI: https://doi.org/10.1142/S0129167X15500718

（２）Takehiro Hasegawa, Seiken Saito, Iwao Sato,
A generalization of a graph theory Mertens' theorem: abelian covering case,
The Quarterly Journal of Mathematics, **査読有**, Vol. 66, No. 3, 2015, pp. 809-836
DOI: https://doi.org/10.1093/qmath/hav024

（３）Takehiro Hasegawa, Seiken Saito,
On graph theory Mertens' theorems,
Graphs and Combinatorics, **査読有**, Vol. 32, No. 5, 2016, pp. 1915-1930
DOI: https://doi.org/10.1007/s00373-016-1710-2

（４）Takehiro Hasegawa, Seiken Saito, Iwao Sato,
A generalization of a graph theory Mertens' theorem: Galois covering case,
Forum Mathematicum, **査読有**, Vol. 30, No. 3, 2018, pp. 599-615
DOI: https://doi.org/10.1515/forum-2016-0060

（５）Takehiro Hasegawa, Hayato Saigo, Seiken Saito, Shingo Sugiyama,
A quantum probabilistic approach to Hecke algebras for p-adic PGL2,
To appear in Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **査読有**

〔学会発表〕（計１２件）

（１）発表標題：Constructions of Drinfeld modular towers
学会等名：Workshop on Galois point and related topics
発表場所：神奈川大学

（２）発表標題：Constructions of Drinfeld modular towers
学会等名：神楽坂代数セミナー
発表場所：東京理科大学

（３）発表標題：Constructions of Drinfeld modular towers
学会等名：今野・竹居研究室セミナー
発表場所：横浜国立大学

（４）発表標題：超特異ドリンフェルト加群を勘定する超特異多項式
学会等名：Workshop on Galois point and related topics
発表場所：新潟大学

（５）発表標題：超特異ドリンフェルト加群を勘定する超特異多項式
学会等名：米沢数学セミナー
発表場所：山形大学

（６）発表標題：超特異ドリンフェルト加群を勘定する超特異多項式
学会等名：日本応用数理学会
発表場所：北九州国際会議場

（７）発表標題：ドリンフェルト・モジュラー曲線の超特異点の個数
学会等名：早稲田大学整数論セミナー
発表場所：早稲田大学

（８）発表標題：有限集合の分割と関係する多変数恒等式
学会等名：米沢数学セミナー

（９）発表標題：Explicit formula of a supersingular polynomial for rank-2 Drinfeld modules
学会等名：Workshop on Galois point and related topics

（１０）発表標題：Explicit formula of a supersingular polynomial for rank-2 Drinfeld modules
学会等名：秋季総合分科会

（１１）発表標題：有限集合の分割と関係する多変数恒等式

学会等名：新潟代数セミナー

（１２）発表標題：関数体の明示的な志村
塔：竹内のリストの応用
学会等名：代数的整数論とその周辺

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
長谷川武博（HASEGAWA, Takehiro）
滋賀大学・教育学部・准教授
研究者番号：80409614

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）