

平成 30 年 6 月 14 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17509

研究課題名(和文) ガロア表現の変形とp進L関数の特殊値の研究

研究課題名(英文) Study of deformations of Galois representations and special values of p-adic L-functions

研究代表者

千田 雅隆 (Chida, Masataka)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：00451518

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では代数的サイクルと(p進)L関数の特殊値との関係について研究を行い、特に Chow-Heegner サイクルと Hecke 指標の L 関数の特殊値の関係について明らかにすることができた。また、総実代数体上のユニタリ群から定まる志村曲線上の久賀-佐藤多様体と CM 型 Abel 多様体の直積の上に代数的サイクルを構成し、p 進 Abel-Jacobi 写像の下での像を Coleman 積分を用いて記述することができた。

研究成果の概要(英文)：In this research, I studied a relation between algebraic cycles and special values of (p-adic) L-functions and I showed an explicit formula between Chow-Heegner cycles and special values of L-functions associated to Hecke characters. I also constructed an algebraic cycle on the product of a Kuga-Sato variety over a Shimura curve associated to a unitary group over a totally real field and a CM Abelian variety and gave an explicit description of the image of the algebraic cycle under the p-adic Abel-Jacobi map using Coleman integration.

研究分野：岩澤理論

キーワード：p進L関数 岩澤理論 一般化Heegnerサイクル Chow-Heegnerサイクル

1. 研究開始当初の背景

Dedekind ゼータ関数に対する類数公式や BSD 予想のようにゼータ関数や L 関数と呼ばれる関数の特殊値とイデアル類群, 単数や楕円曲線の有理点などのような代数的な対象との間には深い関係があると考えられている. このような関係は Stark 予想, Beilinson 予想や Bloch-加藤らによる玉河数予想として問題が定式化され, 様々な研究が行われてきた. 一方で, このような予想の p 進類似として p 進 L 関数と代数的対象との間にも深い関係があると期待され, 岩澤理論における重要な研究テーマになっている. Galois 表現の変形は岩澤理論の研究において非常に重要であり, Mazur-Wiles の有理数体の場合の岩澤主予想の解決や Wiles による総実代数体の岩澤主予想の解決においても Galois 表現の p 進的な変形理論(肥田理論)はその証明の中で, とても大きな役割を果たしている. また近年, L 関数の特殊値と代数体の単数の関係についての予想である Stark 予想の p 進類似である Gross-Stark 予想は Darmon-Dasgupta-Pollack や Ventullo らによって Hilbert 保型形式に伴う Galois 表現の肥田変形を用いて, 初め主に単数群のランクが 1 の場合に研究が行われ, さらにその後, その研究を進展させることによって Dasgupta-Kakde-Ventullo は一般のランクの場合の Gross-Stark 予想も解決している. また, 最近 Bertolini-Darmon-Prasanna や Darmon-Rotger らにより高次元の多様体の代数的サイクルから作られる Euler system を用いて BSD 予想の研究が行われており, この研究においても Galois 表現の変形を用いることがとても重要な点になっている. このように Galois 表現の変形を考えることは現在でも L 関数の特殊値の研究を行う上で欠かすことのできない手法になっており, 今後もこのような手法を用いた研究がさらに発展していくことが期待されている.

2. 研究の目的

本研究の主な目的は Galois 表現の変形を用いて代数体の単数や楕円曲線の有理点, 久賀-佐藤多様体上のサイクルなどと L 関数や p 進 L 関数の特殊値との関係を明らかにすることである. 円分的 p 進 L 関数に対しては Perrin-Riou が特殊値に関する一般的な予想を与えているが, それ以外の反円分的 p 進 L 関数や肥田変形に付随する p 進 L 関数に対しては特殊値がどのように代数的な対象と関係するかについて, あまり明らかにはなっていないことから, 本研究では特に反円分的 p 進 L 関数の特殊値と楕円曲線の有理点や久賀-佐藤多様体上の代数的サイクルの関係を明らかにすることを目標とする. また Bertolini-Darmon-Prasanna は久賀-佐藤多様体と CM 型アーベル多様体を直積した多様体上に一般化 Heegner サイクルと呼ばれるサイクルを構成し, 反円分的 p 進 L 関数の特

殊値と関連付けるある種の p 進 Gross-Zagier 公式を証明し, その公式の様々な応用を与えている. このような公式を他の場合にも一般化し, BSD 予想や Bloch-加藤予想などの研究に応用することが具体的な目標である.

3. 研究の方法

楕円曲線の有理点や久賀-佐藤多様体のサイクルを L 関数の特殊値や p 進 L 関数の特殊値と結びつける方法はいくつか知られている. 例えば Bertolini-Darmon は楕円曲線に対する反円分的岩澤主予想の研究の中で志村曲線の悪い還元を持つ素点における一意化の理論を用いて Rankin-Selberg L 関数の中心点での値と Heegner 点とレベル上げを用いて構成される Galois コホモロジーの元を結びつけるある種の明示的相互法則を示している. この手法を一般化することでまだ知られていない場合に保型 L 関数の特殊値と代数的サイクルの関係についての研究を行う. 一方, Bertolini-Darmon-Prasanna の研究では一般化 Heegner サイクルの p 進 Abel-Jacobi 写像の下での像を Coleman 積分を用いて記述し, 反円分的 p 進 L 関数の特殊値と関連付けることに成功しており, Coleman 積分を用いる手法も取り入れることで研究を進めていく. このような結果の一般化を行うためには志村多様体を用いた Galois 表現の構成に関する最近の研究や肥田理論, eigenvariety といった Galois 表現の p 進変形に関する最新の研究成果や詳細な知識が必要となることから, その分野の専門家との研究交流を行い, さらに研究集会などに参加し情報の収集を行う.

4. 研究成果

一般の重さの保型形式と有限位数の虚二次体上の Hecke 指標から定まる Rankin-Selberg L 関数の中心値と久賀-佐藤多様体上の Heegner サイクルの関係について研究を行い, Bertolini-Darmon の手法を久賀-佐藤多様体の場合に一般化することで明示的相互法則を証明し, それを用いて Bloch-加藤予想の特別な場合への応用を行なった. さらにこの研究と関連して, R=T 定理を応用することで四元数環上の保型形式のレベル上げ定理を証明し, Jacquet-Langlands 対応の下での period の比較に関する結果も示すことができた.

Bertolini-Darmon-Prasanna は一般 Heegner サイクルに対する p 進 Gross-Zagier 公式の応用として楕円曲線上の Chow-Heegner 点の研究を行っている. 彼らは Tate 予想の仮定のもとで久賀-佐藤多様体と CM 型アーベル多様体を直積して得られる代数多様体と CM 型楕円曲線の間で代数対応を構成し, 一般化 Heegner サイクルを用いることで CM 楕円曲線上に新しく有理点 (Chow-Heegner 点) を構成し, Heegner 点との比較を行っている. この研究を CM 型楕円曲線の直積の場合に一

般化し, (Tate 予想の仮定のもとで)一般化 Heegner サイクルを用いて CM 型楕円曲線の直積の上に新しい代数的サイクル (Chow-Heegner サイクル)を構成し, そのサイクルの p 進 Abel-Jacobi 写像の下での像が Heegner サイクルの像と関連付けられることを証明した. さらにその二つの像のずれに Hecke 指標から定まる L 関数の特殊値が現れることも証明することができた. また, Selmer 群の元としては Tate 予想を仮定しなくとも Chow-Heegner サイクルの p 進 Abel-Jacobi 写像の下での像となるべき元が構成できることも分かった.

中央研究院(台湾)の Ming-Lun Hsieh 氏と総実代数体上の一般化 Heegner サイクルと反円分的 p 進 L 関数の特殊値についての共同研究を行い, 実際に総実代数体上のユニタリ群から定まる志村曲線上の久賀-佐藤多様体と CM 型アーベル多様体を直積した多様体の上に一般化 Heegner サイクルの拡張になっていると期待される代数的サイクルを構成し, Coleman 積分を用いて p 進 Abel-Jacobi 写像の下での像を計算した. この計算結果は p 進 Gross-Zagier 公式を総実代数体上に一般化する際に重要な役割を果たすと期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Masataka Chida and Ming-Lun Hsieh, L -functions for modular forms, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*に掲載予定(査読有り).

Francois Brunault and Masataka Chida, Regulators for Rankin-Selberg products of modular forms, *Annales mathématiques du Québec* 40 (2016), 221-249(査読有り).

Masataka Chida, Selmer groups and central values of L -functions for modular forms, *Annales de l'institut Fourier* 67 (2017), 1231-1276(査読有り).

千田雅隆, Regulator と Rankin-Selberg L 関数の特殊値, *数理解析研究所講究録* 1973 (2015), 115-119(査読無し).

千田雅隆, Rankin-Selberg L 関数の特殊値に関する Beilinson 予想について, 第 60 回代数学シンポジウム報告集 (2016), 195-208(査読無し).

[学会発表](計 10 件)

千田雅隆, L 関数の特殊値と regulator について, 東北大学理学部談話会, 東北大学理学部, 2015 年 6 月 1 日.

千田雅隆, Rankin-Selberg L 関数の特殊

値に関する Beilinson 予想について, 代数学シンポジウム, 静岡大学, 2015 年 9 月 2 日.

Masataka Chida, Beilinson conjecture for Rankin-Selberg products of modular forms, レギュレーター in ニセコ, ヒルトンニセコビレッジ, 2015 年 9 月 7 日.

Masataka Chida, CM cycles and Bloch-Kato conjecture for modular forms, Small workshop in Number Theory, Fudan University(上海), 2015 年 12 月 14 日.

千田雅隆, BSD 予想に関する Bhargava-Skinner-Zhang の結果について, 東北大学整数論セミナー, 東北大学理学部, 2016 年 7 月 11 日.

千田雅隆, モチーフの円分 p 進 L 関数の存在予想, 研究集会「保型 L 関数の特殊値と付随する p 進 L 関数」, 美山町自然文化村 河鹿荘(京都府南丹市), 2016 年 9 月 19 日.

Masataka Chida, Selmer groups for Rankin-Selberg products of modular forms, 研究集会「 p -adic methods in arithmetic geometry at Sendai」, 東北大学片平キャンパス 知の館, 2016 年 11 月 1 日.

Masataka Chida, Chow-Heegner cycles on products of CM elliptic curves, Fukuoka International Conference on Arithmetic Geometry in 2017, 九州大学西新プラザ, 2017 年 4 月 20 日.

Masataka Chida, Chow-Heegner cycles on self-products of CM elliptic curves, Workshop on p -adic L -functions and algebraic cycles, National Taiwan University (台湾), 2017 年 9 月 15 日.

Masataka Chida, Arithmetic diagonal cycles and special values of p -adic L -functions, UK-Japan Winter School 2018 "Galois Representations and Automorphic forms", King's College London (イギリス), 2018 年 1 月 10, 11 日(連続講演).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~chida>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

千田 雅隆 (Masataka Chida)

東北大学大学院理学研究科助教

研究者番号：00451518

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()