

令和元年5月23日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17510

研究課題名(和文)特異点論の新展開

研究課題名(英文)New perspectives on the singularity theory

研究代表者

安田 健彦 (Yasuda, Takehiko)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：30507166

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：正標数や混合標数と言われる状況に置ける空間の特異点や、特異点が整数論において果たす役割について新しい知見や定理が得られた。より具体的には、(1) 整数論に関する二つの予想、マニン予想とマレ予想の関連付けとそこでの特異点の役割に関する知見、(2) 野性マッケイ対応の研究の進展による野性的商特異点の構造の理解、(3) ヴォイタ予想の特異点の視点からの定式化、などの成果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

整数論の代数幾何を用いた研究は数論幾何という大きな分野となっているが、特異点の役割は軽視されてきたように感じられる。本研究により、特異点を通して整数論を見たり、逆に整数論を特異点研究に応用するなどの新しい知見や手法が得られた。また、本研究には一部、数理物理からのアイデアも応用されており、複素分野の境界領域における発展とすることができる。

研究成果の概要(英文)：We have obtained new perspectives and theorems about singularities of spaces in positive or mixed characteristics and about roles played by singularities in the number theory. More specifically, we have obtained: (1) perspectives on relation between two conjectures in the number theory, Manin's conjecture and Malle's conjecture, and the role that singularities play there, (2) understanding the structure of wild quotient singularities thanks to development of the wild McKay correspondence, (3) formulation of Vojta's conjecture from the viewpoint of singularities.

研究分野：代数幾何

キーワード：特異点 マッケイ対応 整数論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何の研究対象である代数多様体にしばしば現れる特異点は、代数多様体の解析を困難にする。そのため特異点の理解を深めることが重要となる。正標数や混合標数における特異点は標数零の場合に比べ理解が遅れている。例えば、標数零において基本的である特異点解消定理は、正標数や混合標数では未解決である。

また、数論幾何を通して整数論と特異点は密接に関係するはずであり、本格的な研究が必要である。

2. 研究の目的

野性 McKay 対応という特異点と整数論を結ぶ新しい理論を発展させる。その応用として、正標数や混合標数の理解に整数論を応用したり、逆に特異点の幾何を利用して整数論の結果を得ることを目指す。

野性 McKay 対応以外にも、整数論との関係を中心に、特異点論への新しいアプローチの可能性を模索する。

3. 研究の方法

野性 McKay 対応の理論構築において大きな部分を占めるのがモジュライ空間の構成である。より具体的には冪級数体や局所体のガロア拡大のモジュライ空間が必要となる。このモジュライ空間を局所体の理論と代数的スタックの理論を用いて構成する。また、このモジュライ空間の上でのモチーフ積分を解析することで、野性 McKay 対応を通して野性商特異点の性質を解析する。

これ以外にも、代数体上の代数多様体の有理点について特異点との関わりについて Manin 予想、Vojta 予想などを通して観察する。

4. 研究成果

野性 McKay 対応で必要となる冪級数体のガロア拡大のモジュライ空間を、重要な p 群と従順巡回群の半直積の場合に、ほぼ満足のいく形で構成することが出来た (Fabio Tonini 氏との共同研究)。このモジュライ空間が有限型 Deligne-Mumford スタックの極限となることを証明した。さらにアーベル p 群の場合にはモジュライ空間の形を非常に具体的な形で記述することが出来た。これらは Harbater の結果の一般化・精密化となっている。今後はこのモジュライ空間を用いて、野性的 Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の理論を構築し野性 McKay 対応予想を一般的な状況での証明に応用する方向に研究が発展していくことが期待される。

また、素数位数の巡回群の場合の野性 McKay 対応を精密に解析することで、素数位数の巡回群による商特異点の性質についての理解を深めることが出来た。具体的には、この種の商特異点がいつ末端的、標準的、対数標準的になるかを、表現の簡単な不変量の値から決定することができた。この結果を、いつ Cohen-Macaulay 的になるかという従来知られていた結果と組み合わせることで、Cohen-Macaulay 的でないが末端的な特異点という標数零では存在しない病的な特異点の例を構成することができ、正標数の特異点の理解が深まった。このような病的な特異点の理解は、今後発展が期待される正標数の高次元代数多様体や極小モデル理論の研究において重要になるだろう。

代数体上の McKay 対応類似を考察することで整数論の二つの予想、Manin 予想と Malle 予想の関連について新しい知見が得られた。前者は有理点の分布に関するもので、後者は代数体の分布に関するものであるが、代数体上の商多様体について McKay 対応の類似とヒューリスティックな議論から二つの予想が関連付けられる。また、Vojta 予想を特異点の視点から定式化・一般化した。これは Vojta 自身による乗数イデアルを用いた定式化をさらに一步推し進めたものである。これにより Vojta 予想と高次元代数多様体論の関連がより強くなり、両分野のさらなる融合が期待される。今後はこれらの知見を、より厳密な理論や具体例計算などに応用していくことが重要な問題となる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

Fabio Tonini and Takehiko Yasuda, Notes on the motivic McKay correspondence for

the group scheme α_p ,
Proceedings of the 5th FJV2017 Kagoshima 掲載決定, 査読有り
Takehiko Yasuda, Discrepancies of p-cyclic quotient varieties,
J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 2019, vol. 26, pp. 1-14, 査読有り
Takehiko Yasuda, Vojta's conjecture, singularities and multiplier-type ideals,
Kodai Math J., 2018, vol. 41, pp. 566-578, 査読有り
DOI: <https://doi.org/10.2996/kmj/1540951254>
Takehiko Yasuda, Motivic Serre invariants modulo the square of L-1,
Proc. Amer. Math. Soc., 2017, Vol. 146, pp. 547-554, 査読有り
DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/proc/13780>

〔学会発表〕(計 7 件)

Takehiko Yasuda, The motivic version of Serre's mass formula, Higher dimensional algebraic geometry, 2018
Takehiko Yasuda, Moduli of formal torsors, Singularities and Algebraic Geometry, 2018
Takehiko Yasuda, Equisingularities and dualities of local field masses, The 5th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2017
Takehiko Yasuda, The wild McKay correspondence, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017
Takehiko Yasuda, Rational points on quotient varieties, 2017 Atkin Workshop: Height zeta functions, 2017
Takehiko Yasuda, The McKay correspondence and mass formulas for local Galois representations, Local zeta functions and the arithmetic of moduli spaces, 2017
Takehiko Yasuda, Vojta's conjecture and singularities, Arithmetic and Algebraic Geometry, 2016

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。