

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：14701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17511

研究課題名(和文)ガロアの逆問題を背景とする不変体有理性問題の研究

研究課題名(英文)A study of the rationality problem from the viewpoint of the inverse Galois problem

研究代表者

北山 秀隆 (Kitayama, Hidetaka)

和歌山大学・教育学部・准教授

研究者番号：20622567

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では、自身を含む共著論文 "Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems", A.Hoshi, M.Kang, H.Kitayama, Journal of Algebra, Vol.403, 363-400 (2014) で行なった研究を拡張する成果を得た。上記論文では、2次元のquasi-monomial actionsと呼ばれる作用の有理性問題を扱っていたが、今回の研究では、3次元の場合および2次元の少し一般の場合へ拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有理性問題は、代数幾何学の分野では古くからの主要な研究テーマであり、また、Noether問題と呼ばれるケースではガロアの逆問題の側面からも捉えられている。Noether問題についても様々な研究が知られているが、現在も未解決の問題となっている。このような状況において、今回の研究は、それに関連してquasi-monomialと呼ばれる群の作用による不変体の有理性を調べるものであり、Noether問題はじめ有理性問題全般としての意義がある。

研究成果の概要(英文)：In this study, I have developed my old paper "Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems", A.Hoshi, M.Kang, H.Kitayama, Journal of Algebra, Vol.403, 363-400 (2014), which treated the rationality problem of 2-dimensional purely quasi-monomial actions. I obtained some results on 3-dimensional purely quasi-monomial actions and 2-dimensional quasi-monomial actions.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 有理性問題 Noether問題 ガロアの逆問題

1. 研究開始当初の背景

ガロアの逆問題への1つのアプローチとして Emmy Noether は次の問題を提唱した。体 K と有限群 G が与えられ、 G は $|G|$ 個の変数をもつ K 上の有理関数体 $K(x_g \mid g \in G)$ 上に、 $h(x_g) = x_{hg}$ ($g, h \in G$) で定まる K 自己同型により作用しているとする。このとき、『 G の作用による不変体 $K(G) := K(x_g \mid g \in G)^G$ は K 上有理的 (= K 上純超越拡大) か? どのような条件のもとで有理的になるか?』この問題は Noether 問題と呼ばれる。 K が Hilbert 体 (例えば代数体、特に \mathbb{Q}) の場合、もし不変体 $K(G)$ が K 上有理的ならば、Hilbert の既約性定理により K 上のガロア拡大でそのガロア群が G と同型であるものの存在が導かれるというのが Noether の目論見である。様々な角度から詳細な研究が行われているが、問題の見かけの単純さに反して Noether 問題は現在も未解決である。

Noether 問題は、よく知られた議論により、超越次元の小さい monomial action の不変体有理性問題に帰着される。本研究計画では quasi-monomial action と呼ばれる monomial action の一種の一般化についての不変体有理性問題を主な研究対象とした。この quasi-monomial action というものは、星明考氏・Ming-chang Kang 氏及び本研究代表者により新しく導入された概念で、従来の意味での monomial action の不変体の有理性問題や代数的トラスの有理性問題、さらにその中間的なものまでを包含する広い概念である。この quasi-monomial action についての不変体有理性問題について、星明考氏・Ming-chang Kang 氏との共同研究で

“Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problem”, A.Hoshi, M.Kang, H.Kitayama, Journal of Algebra, Vol.403, 363-400 (2014) を出版した。これは、2次元の purely の場合を完全に解決したものである。

2. 研究の目的

以上のような状況で、本研究の目的は、上記論文を出発点としてさらに研究を進めることである。また、上記の論文では、次元の大きい purely monomial action の不変体の有理性問題に対する応用も示していたので、同様に purely monomial action に対する応用も目指した。具体的には、主に以下の2つを目的とした。

(1) 上記の論文の成果を (purely という条件を付けたままで) 3次元に拡張すること。ただし、これは3次元の場合に、quasi-monomial action ではなく元々の意味での monomial action の大部分に対する結果を与えた論文

“Rationality problem of three-dimensional monomial group actions”, A.Hoshi, H.Kitayama, A.Yamasaki, Journal of Algebra, Vol.341 (2011), 45-108 の拡張にもなっている。

(2) 上記の2014年の論文の成果を (2次元で) purely でない一般の quasi-monomial action に拡張すること。ただし、一般の quasi-monomial action まで対象を広げてしまうと、複雑になり過ぎて現状では手に負えないことが既に分かっていたので、適切な条件を付けた上で研究を進めることを目標とした。

3. 研究の方法

一般に n 次元の quasi-monomial action は、 $GL(n; \mathbb{Z})$ の有限部分群の共役類に対応づけて分類できる。 $GL(n; \mathbb{Z})$ の有限部分群の共役類は、 $n=2$ のときは13の共役類があり、 $n=3$ のときは73の共役類がある。quasi-monomial action の場合は係数体への作用の仕方が複数有りえるため、共役類を決めれば作用がただ一つに定まるわけではないが、基本的には共役類の分類に従って研究を進めた。上記の2014年の論文では、13の共役類のうち4次巡回群か4次二面体群に同型な2つを除くどの場合も不変体が有理的になることを証明し、また除外された2つについても不変体が有理的になるための必要十分条件が得られていた。基本的にはこの手法に倣って研究を進めたが、途中には興味深い新たな現象なども多々見られた。

4. 研究成果

(1) 上記の2014年の論文の成果を (purely という条件を付けたままで) 3次元に拡張する研究を行い、ごくわずかな例外を除いて解決することができた。また、5次元以下の purely monomial action による不変体の有理性問題に対する応用も示した。これらを

“Three-dimensional purely quasimonomial actions”, A.Hoshi, H.Kitayama, Kyoto Journal of Mathematics, Vol.60 (2020), 335-377 として出版した。

(2) 上記の 2014 年の論文の成果を (2 次元で) purely でないもう少し一般の quasi-monomial action の場合に拡張する研究の途上で別種の有理性問題を考察する必要性が有り、その研究を先に行った。その結果を

“ A two-dimensional rationality problem ” , A.Hoshi, M.Kang, H.Kitayama, A.Yamasaki, arXiv:1801.06616

にまとめ、プレプリントサーバーで公開した。学術雑誌への投稿のためにはもう一步改良が必要であると考えられるため、それは今後の課題である。

(3) (2) の研究に引き続いて、上記の 2014 年の論文の成果を (2 次元で) purely でないもう少し一般の quasi-monomial action の場合に拡張する研究を行った。大部分は既に完成しており、論文原稿としてもまとめているが、一部分のみ解決できていない問題が残っており、その進展は今後の課題である。

(4) 今回の研究計画と明示的な直接関係は現在のところ得られていないが、関連するテーマの研究も行い、以下の 2 つの論文を発表した。

“ On the irreducibility of Fibonacci and Lucas polynomials over finite fields ” , H.Kitayama, D.Shiomi, Finite Fields and Their Applications, Vol.48C(2017), 420-429

“ Dimension formulas of paramodular forms of squarefree level and comparison with inner twist ” , Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol.69 (2017), 597-671

特に 2 つ目の論文は、共役類の分類という点で今回の研究計画と共通する部分があり、相乗効果が有った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akinari Hoshi, Hidetaka Kitayama	4. 巻 60
2. 論文標題 Three-dimensional purely quasi-monomial actions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 335-377
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） DOI 10.1215/21562261-2019-0008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hidetaka Kitayama, Daisuke Shiomi	4. 巻 48C
2. 論文標題 On the irreducibility of Fibonacci and Lucas polynomials over finite fields	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 420-429
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.ffa.2017.09.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomoyoshi Ibukiyama, Hidetaka Kitayama	4. 巻 69
2. 論文標題 Dimension formulas of paramodular forms of squarefree level and comparison with inner twist	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 597-671
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） doi:10.2969/jmsj/06920597	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 0件／うち国際学会 2件）

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 モジュラー形式とガロアの逆問題
3. 学会等名 第17回北陸数論研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups
3. 学会等名 Journées Arithmétiques 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Rationality problem for purely monomial group actions
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Noetherの不变体有理数問題とその周辺
3. 学会等名 大分熊本整数論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups
3. 学会等名 3rd Japanese-German Number Theory Workshop (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 純単項作用の不变体有理性問題
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 純単項作用の不变体有理性問題
3. 学会等名 早稲田整数論研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 ガロアの逆問題を背景とする不变体有理性問題について
3. 学会等名 埼玉大学理学部数学教室談話会
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 あるジークルモジュラー形式の対応予想、およびリフティング予想とその数値実験
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Computations of Siegel modular forms with respect to non-split symplectic groups
3. 学会等名 RIMS研究集会「計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展」
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 北山秀隆
2. 発表標題 Three-dimensional purely quasi-monomial actions
3. 学会等名 日本数学会2016年度年会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考