2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 19 日現在

機関番号：１５５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５１２
研究課題名（和文）無平方数でない整数の分布及び新約数問題の応用に関する研究

研究課題名（英文）non-square free integers and some developments from a new divisor problem

研究代表者
南出　真（Minamide, Makoto）

山口大学・大学院創成科学研究科　・講師

研究者番号：８０５９６５５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：リーマンゼータ関数やディリクレL関数の微分から考えられる数論的関数の平均の誤差項について，ヴォロノイ公式，チャウラ・ヴァルム公式の類似を示し，誤差項の二乗平均の評価を行った。また，リーマンゼータ関数の一階導関数の二乗について，ティッチマーシュの方法を発展させてホールによる近似関数等式の誤差項の改良に成功した。又，二重ゼータ関数の評価を改良することで木内・南出による二乗平均の結果を改良した。他に，無平方数に素因数の大きさに条件を付けた公式を示した。論文としては，まだまとまっていないが，ジョルダン関数等の数論的関数の平均の誤差項の一乗平均についても成果があり，それを講演した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
リーマンゼータ関数の導関数の二乗の近似関数等式の誤差項の改良する問題は，1999年にR.R.Hall によって述べられていた。Hall が述べた通りに解決することができ、リーマンゼータ関数の理論の発展に貢献できた。この問題に挑戦する過程で、ゼータ関数の微分から考えられる数論的関数の問題を考えた。その成果の一部は近似関数等式の研究に用いられたし，Hall の問題を考えることで新たな数論的関数の研究につながったと思う。また,この研究を通してインドの研究者と交流が持てたことは良かったと思う。

研究成果の概要（英文）：I have studied some analogues of Voronoi formula and Chowla-Walum formula on arithmetical functions which are ariesd from products of derivatives of the Riemann zeta-function, Dirichlet L function. Especially, I obtained estimates of square of error terms in averages of those arithmetical functions. Moreover, I studied the error term of the approximate functional equation of the square of the derivative of the Riemann zeta function, by the method of Titchmarsh. It was considered by R.R.Hall, the first in 1999. I showed an expected estimate by him. In addition, I have examined the double zeta function, square-free integers, the Jordan function.

研究分野：解析的整数論

キーワード：リーマンゼータ関数　導関数　数論的関数　約数問題　円問題　ジョルダン関数　無平方数　二重ゼータ関数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

リーマンゼータ関数の零点の研究は一つの大きな研究テーマであるが，1999 年に R. R. Hall は臨界線上の隣接零点の差の分布の研究において，リーマンゼータ関数の導関数の二乗の近似関数等式を導いた．その近似関数等式について，Hall は Titchmarsh の方法を用いて誤差項の改良を示唆した(Mathematika, 46 (1999), 281--313)．この問題に取り組むことが研究課題である．一方で，リーマンゼータ関数の二乗が約数関数の母関数であることから，リーマンゼータ関数の導関数の二乗を，約数関数の類似関数の母関数と思えば，ゼータ関数やディリクレ L 関数などの微分の積から考えられる数論的関数についても興味がある．そのような数論的関数の平均の誤差項について，有限型 Voronoi 公式を私自身が研究していた．リーマンゼータ関数の導関数の近似関数等式の研究においても，その数論的関数は現れるので，リーマンゼータ関数の微分などから考えられる諸々の数論的関数の Voronoi 公式を見出そうと考えた．また，素因子が y より大きい, x 以下の無平方数の個数を考えると，主項が素因子が y より大きい, x 以下の自然数の個数の主項が等しいので，素因子が y より大きい x 以下の無平方数でない自然数の個数を評価しようと考えた．

２．研究の目的

上に述べた Hall の近似関数等式の誤差項を改良する事，ガウスの円問題をゼータ関数の微分，ディリクレ L 関数の微分の積を母関数とする数論的関数の平均を考え，その誤差項についての有限型 Voronoi 公式を見出す事，素因子が y より大きい x 以下の無平方数でない自然数の個数の評価を得る事が研究の目的である．

３．研究の方法

(1) 無平方数でない整数の分布の問題: 素因子が y より大きい x 以下の無平方数の個数についての Buchstab 恒等式，素因子が y より大きい x 以下の自然数の個数についての Buchstab 恒等式の差を取り，誤差項部分をより精密に評価することを行った．得られた成果は良くないようで，論文は受理されなかったが，学会講演は行った（講演欄 ⑮, ⑯).

(2) 有限型 Voronoi 公式，Chowla-Walum 公式の問題: ガウスの円問題の微分類似については，リーマンゼータ関数，ディリクレ L 関数の関数等式をそれぞれ一階微分する．それらの積を考え，J-ベッセル関数の公式が使える状況にする．しかし，微分することで，公式が直に使えなくなるから，誤差項を含んだものにする．後は，ゼータ関数の微分の二乗の有限型 Voronoi 公式の論文(M. Minamide, Indian J. Math. 55 (2013), 325--352)の方針に従って計算する．リーマンゼータ関数の k 階微分，l 階微分の積を母関数とする数論的関数の Chowal-Walum 公式については，数論的関数の平均を対数関数のべき乗に関する部分和に分けて，オイラー・マクロ―リン公式を駆使して公式を導く．

(3) リーマンゼータ関数の導関数の二乗の近似関数等式の問題: リーマンゼータ関数の一階導関数の二乗の近似関数等式の誤差項の改良を行うために，Titchmarsh の方法に従う．微分の二乗を有限和と積分を含んだ無限和で表示し，その積分を少しずつ解析する．このとき，リーマンゼータ関数の関数等式に現れる因子の微分を考察する．この過程で，上の(2) でも用いた積分を直に扱うのを止めて，誤差項を含んだ形にする．そのため，誤差項が多く現れるが，れらを丁寧に評価する．また， Hardy-Littlewood が考察した cos u と u のべき乗の積分に，対数関数のべき乗も入った形の積分を考察する． また, van der Corput の評価などを用いて，近似関数等式の誤差項を得る．

(4) 制限約数問題: 自然数 n の約数 d で, d は n の a 乗以上, (1-a)乗以下を満たす d の個数を表す数論的関数について，n が x 以下であるときの平均を考える問題である．ただし，a=1/N に限定する（N は 2 以上の整数)．その平均を自然数 n が x の a 乗以下, x の a 乗以上 x の 1/2 乗以下に分けて，オイラー・マクロ―リン公式を用いて考察する．また，ベルヌーイ関数の評価などを用いて平均の挙動を得る．

(5) ジョルダン関数などの問題: 数論的関数の平均に条件を付けて考えるという上の研究に刺激を受けて，数論的関数の制限付き平均を考える問題を見つけた．そこで，ジョルダン関数などの平均に m と互いに素という条件を付けることを考えた．.先行研究である D. Suryanarayana の手法に基づいて， 数論的関数 f(n) の平均において，互いに素という条件を付けて計算するが，値が不明瞭な誤差項 E(x)はそのままの形で残しておく．さらに, f(n)n についても同様のことを行う．これら二式を用いて，f(n) の平均の誤差項の一乗平均を導く．このとき，リーマンゼータ関数の非零領域の結果を用いる．

(6) 二重ゼータ関数の問題: 二重ゼータ関数の評価を改良するために，二重ゼータ関数をリーマンゼータ関数を用いて近似する公式においてゼータ関数でない部分 J(s_1, s_2) の評価を，リーマンゼータ関数の評価に帰着させる．二重ゼータ関数の二つの変数の虚部の大小関係を様々な場合に分けて，リーマンゼータ関数の二乗平均値定理などを用いて，その評価を改良す

る．これにより，二重ゼータ関数の評価の改良が得られる．さらに，そのＪの二乗平均を考察することで，二重ゼータ関数の二乗平均を求める．

４．研究成果

研究開始当初のテーマであった，リーマンゼータ関数の導関数の近似関数等式の研究は成果を得たが，その他のテーマは別の方向にも研究が発展した．

(1)有限型 Voronoi 公式，Chowla-Walum 公式についての問題：リーマンゼータ関数の導関数の二乗を母関数とする数論的関数（D(n)と記す）について，n が x 以下のときの平均の誤差項 E(x) については有限型 Voronoi 公式や二乗平均を私自身が得ていたが，D. Banerjee 氏と共に，E(x)の一乗平均を考察し，一般ベッセル関数を含んだ無限級数で表した(誤差項もある)．その応用として，E(x) の整数点に対する平均も得た．リーマンゼータ関数の k 階微分，l 階微分の積であるディリクレ級数の係数を D(n;k,l)と記すことにする．D(n;k,l)の n が x 以下の平均の誤差項 を E(x;k,l) とする．この誤差項について，ベルヌーイ関数を用いた和として表す Chowla-Walum 公式を古屋淳氏，谷川好男氏と研究した．その応用として，E(x;k,l)の評価を得た．これらはディリクレの約数問題の新展開と捉えることができると思うが，ガウスの円問題にも同様の問題を考えることができた．ゼータ関数の微分と法４のディリクレL 関数の微分の積を母関数とする数論的関数を R(n)と書くことにする．R(n) の n が x 以下の平均の誤差項を P(x)とする．P(x) について，J ベッセル関数に関する有限和と誤差項で表す，有限型 Voronoi 公式を谷川氏，古屋氏と求めた．また，その応用として P(x) の二乗平均の公式を導いた．ゼータ関数の微分，ディリクレ L 関数の微分の積についての Chowla-Walum 公式については，これまで考察していなかったので，古屋氏，谷川氏と共にそれを考え，上述の P(x) の一般化を Chowla-Walum 公式として得た．そして，その評価も得た．ゼータ関数の微分の積を母関数とする数論的関数の研究は，2009 年から行っていたもので，一定の研究成果を残せたと思われる（論文欄　②，③，⑤，⑦)．

(2)リーマンゼータ関数の導関数の二乗の近似関数等式の問題：R.R. Hall がリーマンゼータ関数の導関数の二乗の近似関数等式を 1999 年に得ているが，その誤差項に ((x+y)/t)の 1/4 乗という項が含まれている．この項を 谷川氏，古屋氏と考察し，Hall の示唆通りに取り除くことができた．Hall の言うように Titchmarsh の方法を用いたのであるが，その過程で，リーマンゼータ関数の導関数の二乗などを母関数とする数論的関数の平均の誤差項についての有限型 Voronoi 公式の研究で用いたアイデアや得られた公式を用いた．リーマンゼータ関数の導関数の研究に貢献出来たと思う(論文欄①)．

(3)制限約数問題：リーマンゼータ関数の導関数の 4 乗平均値を考えて，ゼータ関数の微分の零点分布の研究を試みたが，その過程でゼータ関数の導関数の二乗を母関数とする数論的関数の二乗平均を考察し，通常の約数問題において，約数の大きさに条件を付けるという問題に変化した．自然数 n の約数 d は n の a 乗以上，(1-a)乗以下(a=1/N，N は 2 以上の整数) という条件を満たす d の個数を d(n,a)と記す．このとき，n が x 以下である d(n,a) の和についての公式を，谷川氏，古屋氏と考察した．また，その誤差項の二乗平均の評価についても考察した．もともとは，リーマンゼータ関数の導関数の研究であったが，それが，従来の約数問題に制限を付けた問題と変化したことは，ゼータ関数の微分の研究や約数問題の研究の意義が深まったと思われる（論文欄 ④)．

(4)ジョルダン関数などの問題：井川祥彰氏，谷川氏，古屋氏と協力して，D.Suryanarayana が研究した x 以下の k-free な自然数で，m と互いに素なものの個数の誤差項の精密化を行った．また，井川氏とは，ジョルダン関数などの平均を k と互いに素という制限下で考え，誤差項の一乗平均を求めた．また，井川氏と，n の約数で，k と互いに素なものの最大数のべき乗平均の公式を求めた．これらは，まだ論文が仕上がっていないが，日本数学会中国四国例会などで講演したし，これらの研究に関連した問題を現在研究しているので更なる発展を期待している（講演欄 ③，④，⑤)．

(5)二重ゼータ関数の問題：谷川氏，Banerjee 氏と共に，二重ゼータ関数の近似関数等式の誤差項を詳しく解析することで，二重ゼータ関数の大きさの評価をより精密にした．さらに，この成果を用いて，木内・南出の二重ゼータ関数の二乗平均の誤差項を改良した．これらの成果をまとめて論文投稿中で未だに受理されていないが，その内容を日本数学会で講演した（講演欄 ①，②)．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① J. Furuya, T.M.Minamide, Y. Tanigawa, Titchmarsh's method for the approximate functional equations for ¥zeta^{¥prime}(s)^2, ¥zeta(s)¥zeta^{¥prime¥prime}(s) and ¥zeta^{¥prime}(s)¥zeta^{¥prime¥prime}(s), Canadian Journal of Mathematics (2019,

http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2018-004-9), (査読有)

② J. Furuya, T.M.Minamide, Y. Tanigawa, On representations of error terms related to the derivatives for some Dirichlet series, Illinois Journal of Mathematics 61 (2017), 231—249. (査読有)

③ J. Furuya, M. Minamide, Y.Tanigawa, On a new circle problem, Journal of Australian Mathematical Society 103 (2017) 231—249. (査読有)

④ J. Furuya, M.Minamide, Y. Tanigawa, On a restricted divisor problem, Journal of the Indian Mathematical Society 83 (2016), 269—287. (査読有)

⑤ J. Furuya, M.Minamide, Y. Tanigawa, Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problem, Mathematica Slovaca 66 (2016), 575—582. (査読有)

⑥ D. Banerjee, M.Minamide, On an analogue of Buchstab identity, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics 22 (2016), 8—17. (査読有)

⑦ D. Banerjee, M. Minamide, On average behavior of the error term in a new kind of the divisor problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications 438 (2016) 533—550. (査読有)

⑧ K.Chakraborty, M.Minamide, On the power moments of Hecke multiplicative functions, Journal of the Australian Mathematical Society 99 (2015), 334—340. (査読有)

⑨ I. Kiuchi, M.Minamide, Y, Tanigawa, On a sum involving the Mobius function, Acta Arithmetica 169 (2015), 149—168. (査読有)

〔学会発表〕(計 16 件)

① D. Banerjee, 南出 真, 谷川 好男, Mean square of the double zeta function, 日本数学会秋季総合分科会, 2018 年

② D. Banerjee, 南出 真, 谷川 好男, Bunds of double zeta-function, 日本数学会年会, 2018 年

③ 井川祥彰, 南出 真, 古屋 淳, 谷川 好男, On the number of k-free integers ≦x which are coprime to m, 日本数学会年会, 2018 年

④ 井川 祥彰, 南出 真, 制限付きジョルダン関数の平均の誤差項の一乗平均について, 日本数学会中国四国例会, 2018 年

⑤ 井川 祥彰, 南出 真, 古屋 淳, 谷川 好男, k と互いに素な約数の最大数の平均について, 日本数学会中国四国例会, 2018 年

⑥ 南出 真, 古屋 淳, 谷川好男, ゼータ関数の微分に関連した約数問題について, 日本数学会秋季総合分科会, 2017 年

⑦ 南出 真, 古屋 淳, 谷川 好男, ¥zeta(s)¥zeta^{¥prime¥prime}(s), ¥zeta^{¥prime}(s)¥zeta^{¥prime¥prime}(s) の近似関数等式について, 日本数学会年会 2017 年

⑧ 南出 真, 古屋淳, 谷川好男, 条件付きメビウス関数の和について, 日本数学会 中国四国例会, 2017 年

⑨ 南出 真, 古屋 淳, 谷川 好男, ¥zeta^{¥prime}(s)^2 の近似関数等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 2016 年

⑩ D. Banerjee, 南出 真, On the first moment of ¥Delta_{(1)}(x), 日本数学会年会, 2016 年

⑪ 谷川 好男, 古屋 淳, 南出 真, 制限約数問題について, 日本数学会年会, 2016 年

⑫ M. Minamide, A divisor problem with respect to the derivative of the Riemann zeta function, 日韓整数論セミナー, 2016 年

⑬ 古屋 淳, 南出 真, 谷川 好男, 円問題, 一般約数問題の微分化, 日本数学会中国四国例会, 2016 年

⑭ 南出 真, 古屋 淳, 谷川 好男, 微分円問題における有限型 Voronoi 公式, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年

⑮ D. Banerjee, 南出 真, On nonk-free integers, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年

⑯ D. Banerjee, 南出 真, On nonsquare-free integers, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：谷川 好男
ローマ字氏名：Tanigawa Yoshio
研究協力者氏名：古屋 淳
ローマ字氏名：Furuya Jun

研究協力者氏名：井川 祥彰
ローマ字氏名：Igawa Tadaaki

研究協力者氏名：デビカ バネルジー
ローマ字氏名：Debika Banerjee

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。