

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：16101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17513

研究課題名(和文)代数的局所コホモロジーを利用した特異点解析プログラムの構築

研究課題名(英文)Applications of algebraic local cohomology to hypersurface singularities

研究代表者

鍋島 克輔(Nabeshima, Katsusuke)

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部(理工学域)・准教授

研究者番号：00572629

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：代数的局所コホモロジーを用いて、超曲面の孤立特異点の不変量として、Limiting tangent space, μ^* 列, integral number, 変形チュリナ数, local Euler obstruction を計算するアルゴリズムを構成した。また、特異点解析のためのツールとして、局所環でのイデアル所属問題、偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系を計算するアルゴリズムを構成し計算機代数システムに実装した。多くの結果が得られたと共に、変形特異点に対する一つの計算手法が確立されたことは、今後の変形特異点研究にとって意義深い。

研究成果の概要(英文)：We have given algorithms and implementations for computing invariants of hypersurface isolated singularities (i.e., Limiting tangent space, μ^* -sequence, integral number, local Euler obstruction, Tjurina stratifications of μ -constant deformations). Furthermore, we have introduced algorithms for solving ideal membership problems in local rings and computing comprehensive Groebner systems in PBW algebras. These algorithms are useful to study hypersurface singularities.

研究分野：計算機代数学

キーワード：代数的局所コホモロジー 孤立特異点 アルゴリズム 包括的グレブナー基底系 Limiting tangent space 変形チュリナ数 local Euler obstruction

1. 研究開始当初の背景

代数的局所コホモロジーは、可換代数、代数幾何、トポロジー、D 加群など多くの分野に応用を持つ重要な概念である。しかしながら、Grothendieck の局所コホモロジーの理論が発表された当初は、実際に値を求めるための計算方法については十分な研究がなされてなく、計算法は確立されていなかった。

研究開始当初において、筑波大学の田島慎一教授と研究代表者により効率的な代数的局所コホモロジーの計算アルゴリズムが発表された。代数的局所コホモロジーには数々の応用があることが知られていたため、代数的局所コホモロジーを用いた応用として『実際計算できるもの』を計算すべく、また、新しいアルゴリズムを構成すべく本研究課題を提案した。

研究開始当初において、日本では計算機を用いて超曲面の特異点の解析を行う研究者は少なかったが、特異点の研究に計算機を用いることは古くから行われておりヨーロッパでは今なお活発に計算機を用いて研究がなされており、多くの特異点解析アルゴリズムを研究している。もちろん、諸性質の計算法が今まで知られていないものも数多くあり、その中のいくつかは代数的局所コホモロジーを用いることで計算できることを研究代表者はわかっていた。これを実際、代数的局所コホモロジーを用いて研究し、アルゴリズムを構成することができれば大きな特異点解析ツールとなる。このことより、代数的局所コホモロジーを用いた特異点解析プログラムを研究することとなった。

特異点研究には、古くから『特異点の分類』がある。計算機を用いることにより、より複雑性の高いものを分類できると共に、分類がまだなされていないものも、代数的局所コホモロジーと計算機を用いることにより可能であると予想された。

2. 研究の目的

研究の目的は、研究代表者の先行研究で得られた、効率的な代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムに基づき、超曲面の特異点を解析するための種々の計算法・理論を構築すると共に計算機に実装を行うことである。

特異点の分類研究または解析は、多くの研究者によって昔からなされ、現在は計算機を使わなければならないような複雑なものや、高次元なもののみが残されている研究分野も多い。ましてや定義方程式の係数にパラメータが介在すると、計算複雑さは増す。高速な特異点解析プログラムを作成し公開することにより、計算できなかったものや計算法が存在しなかったものが、計算できるようになる。これにより新しい発見が生じ、関連する研究分野の更なる発展が促進される。

種々の問題における計算法を研究するに

は、それぞれに対応する理論・計算法が必要となる。具体的には、(1) 孤立特異点を持つ超曲面を定める半擬斉次多項式族によるミルナー数一定の変形でのチュリナ数の値、およびイデアル商の構造に応じた変形パラメータ空間を分割・層化する効率的な計算法を構成する。これによりチュリナ数の係数パラメータ依存性を知ることができる。(2) 対数的ベクトル場を構成する。半擬斉次多項式に付随する代数的局所コホモロジーを零化するイデアルと、その半擬斉次多項式のヤコビイデアルのスタンダード基底から対数的ベクトル場の構成が可能である。また、パラメータ付き代数的局所コホモロジーを用いて、パラメータが対数的ベクトル場に与える影響も計算できるようにする。代数的局所コホモロジーを利用することによって、スタンダード基底が計算可能であることは、研究代表者の先行研究によって知られている。拡張コークリッドの互除法のように元々のイデアルの生成元とスタンダード基底との関係を記述することは重要なことである。そこで、(3) 代数的局所コホモロジーとグレブナー基底を利用することによって局所環での拡張スタンダード基底アルゴリズムを構成する。

主にこの3つを目標に研究を行うと共に、それに付随する研究対象物の研究・アルゴリズム構成を行う。

3. 研究の方法

研究代表者の先行研究により得られた代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムを利用することによって研究の目的は達成されたと考えた。研究代表者の先行研究により半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの効率的な計算法が紹介されている。この事実を用いることにより、研究目的(1)、(2)は構成可能であると考えられる。(1)の具体的な構成方法は、定義多項式のヤコビイデアルにより零化される代数的局所コホモロジー類の集合と、ヤコビイデアルの生成元に定義多項式を加えたイデアルにより零化される代数的局所コホモロジー類の集合の2つを考える。この2つの集合の関係性から、ヤコビイデアルを定義多項式で割ったイデアル商の構造が判明する。このイデアル商により零化される代数的局所コホモロジー類の集合を考えると、この集合は有限次元ベクトル空間となりその次元はミルナー数とチュリナ数の差になることが証明される。パラメータ付き代数的局所コホモロジーは、先行研究により計算可能であるため、ミルナー数とチュリナ数の差をパラメータ付き代数的局所コホモロジーの各分類で計算することによってチュリナ数自動分類計算が可能となると考える。(2)の具体的な構成方法も研究代表者の先行結果から構成できると考える。この計算

は主に 3 ステップあり, 1 つ目は何度も述べている代数的局所コホモロジーの計算であり, 2 つ目はパラメータ付きグレブナー基底計算, 3 つ目はパラメータ付き syzygy 計算である。この 3 ステップにより, 対数的ベクトル場は構成可能であると考えた。(3)については, 研究代表者の先行研究を組み合わせることにより構成可能である。原点に台を持つような代数的局所コホモロジーを扱っているので, 原点を有するゼロ次元イデアルにおいて, 原点以外の情報が分かればその情報を, 代数的局所コホモロジーから計算したスタンダード基底に加えることによって, 局所環上での議論が多項式環上での議論となる。そうなれば, ヤコビイデアルの生成元による syzygy 計算に持ち込みことができ, 拡張スタンダード基底アルゴリズムが構成されると予想される。ここでの, 原点以外の情報はグレブナー基底から得られる。

これらの研究を成す場合, 付随する研究も多々ある。それらも研究し, 目標に向かい研究をする予定であった。

研究方法として, 日本・諸外国の関係者から直接情報を得ると共に, 研究の検討や遂行にあたって, 適宜, 適切なアドバイスを受けることで, 研究の効率的な実施を可能とする。本研究については基本的に研究代表者が主に実施する。しかし, 適宜各分野の専門家の適切なアドバイス・協力を仰ぐと共に共同で研究を行うようにする。計算機のシステム環境に関しては, 金沢大学の小原功任准教授の指導を仰ぐようにする。小原准教授は計算機代数システム Risa/Asir でプロセス並列計算研究を行っていると同時に, 現在の Risa/Asir の開発者の 1 人でもある。本研究課題での計算法は, Risa/Asir 上に実装する予定であるので, ぜひその技術を本研究に適用すべく協力を仰ぐ。

本研究は, 数学を計算機で行う学問である『計算機代数学』と『特異点論』, 『計算機科学』を融合し, 特異点の解析を行う画期的なものである。

4. 研究成果

当初予定していた以上に研究成果が得られた。

研究の目的に上げた(1), (2), (3)は達成した。

目標であった(1)「孤立特異点を持つ超曲面を定める半擬斉次多項式族によるミルナー数一定の変形でのチュリナ数の計算」は『半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの効率的計算』を確立すると共に達成した。位相的不変量であるミルナー数一定の変形により, 解析的不変量であるチュリナ数がどのように変化するかを計算するアルゴリズムを構成すると共に実装した。目標であった(2)「対数的ベクトル場の計

算」は, 目標であった(3)「局所環上で拡張標準基底アルゴリズム」を確立することによって達成された。(3)は『収束冪級数環でのイデアル所属問題・拡張イデアル所属問題』を解く効率的なアルゴリズムの構成でなされた。

アルゴリズムの中核を成す『代数的局所コホモロジー計算』も, スタンダード基底を用いることにより計算アルゴリズムの効率化についての研究もなされ論文として発表された。また, 特異点の重要な量である local Euler obstructions や limiting tangent space, μ^* -列の計算アルゴリズムも代数的局所コホモロジーを用いて構成され, 今まで計算できなかったものが計算できるようになった。

代数的局所コホモロジーとホロノミーD 加群には大きな関係があることが知られている。グレブナー基底理論とホロノミーD 加群, 代数的局所コホモロジーを用いて特異点の包括的な変形理論が展開できると予想された。そのためには, 偏微分作用素環、Poincare-Birkhoff-Witt 代数といった非可換な世界での包括的グレブナー基底系の理論を展開する必要があったので, その理論を構成し計算アルゴリズムを導出した。これにより, 特異点の不変量の一つである Bernstein-佐藤多項式が, 特異点の変形によりどのように変化するかを計算することが理論的にできるようになったと考える。

目標としていたことはもとより, 多くの特異点に関する解析アルゴリズム, 局所環での計算アルゴリズムを導入することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

Katsusuke Nabeshima, Shinichi Tajima, Solving parametric ideal membership problems and computing integral numbers in a ring of convergent power series via comprehensive Gröbner systems. Mathematics in Computer Science, 査読有, 2018. (掲載確定)
(DOI: 10.1007/s11786-018-0354-4)

Shinichi Tajima, Katsusuke Nabeshima, An implementation of the Lê-Teissier method for computing local Euler obstructions. Mathematics in Computer Science, 査読有, 2018. (掲載確定)

Katsusuke Nabeshima, Shinichi Tajima, A new method for computing the limiting tangent space of an isolated hypersurface singularity via algebraic local

cohomology. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol.78, pp. 331--344, 2018.

Katsusuke Nabeshima, Katsuyoshi Ohara and Shinichi Tajima, Comprehensive Gröbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules. *Journal of Symbolic Computation*, 査読有, Vol. 89, pp.146--170, 2018.

(DOI: 10.1016/j.jsc.2017.11.010)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Comprehensive Gröbner systems approach to b-functions of μ -constant deformations. *Saitama Mathematical Journal*, 査読有, Vol. 31, pp.115--136, 2017.

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Computing μ^* -sequences of hypersurface isolated singularities via parametric local cohomology systems. *Acta Mathematica Vietnamica*, 査読有, Vol.42, pp.279--288, 2017.

(DOI: 10.1007/s40306-016-0198-4)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals. *Journal of Symbolic Computation*, 査読有, Vol.82, pp.91--122, 2017.

(DOI: 10.1016/j.jsc.2017.01.003)

Katsusuke Nabeshima, Katsuyoshi Ohara and Shinichi Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC' 2016)*, 査読有, ACM, pp 349--356, 2016.

(DOI: 10.1145/2930889.2930918)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Computing Tjurina stratifications of μ -constant deformations via parametric local cohomology systems, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 査読有, Vol. 27, pp. 450--466, 2016.

(DOI: 10.1007/s00200-016-0289-4)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Solving extended ideal membership problems in rings of convergent power series via Gröbner bases, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有, Vol. 9582, Springer, pp.252--267, 2016.

(DOI: 10.1007/978-3-319-32859-122)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Efficient computation of algebraic local cohomology classes and change of ordering for zero-dimensional standard bases, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有, Vol.9301, Springer, pp.334--348, 2015.

(DOI: 10.1007/978-3-319-24021-3_25)

Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities, *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC' 2015)*, 査読有, pp.291--298, ACM, 2015.

(DOI: 10.1145/2755996.2756641)

[学会発表](計 38 件)

鍋島克輔, パラメトリックイデアル所属問題の解き方について, *Risa/Asir conference 2018*, 金沢大学, 2018年3月.

鍋島克輔, 田島慎一, 収束冪級数環での integral number の計算 II, *日本数学会年会(函数論)*, 東京大学, 2018年3月.

鍋島克輔, 田島慎一, 収束冪級数環における generalized integral dependence relation の計算について, *京都大学数理解析研究所共同研究, 「Computer Algebra -- Theory and its Applications」*, 京都大学, 2017年12月.

Katsusuke Nabeshima, Computing Bruce-Roberts Milnor numbers, *Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities*, The University of Sydney, Australia, 2017年9月.

鍋島克輔, 田島慎一, 収束冪級数環での integral number の計算 -- グレブナー基底 vs 代数的局所コホモロジー類 --, *日本数学会秋季総合分科会(函数論)*, 山形大学, 2017年9月.

田島慎一, 鍋島克輔, Transformation law による Grothendieck local residue の計算, *日本数学会秋季総合分科会(函数論)*, 山形大学, 2017年9月.

田島慎一, 加藤満生, 鍋島克輔, Integral dependence relation と半擬斉次孤立特異点の b-関数, *日本数学会秋季総合分科会(函数論)*, 山形大学, 2017年9月.

鍋島克輔, 田島慎一, b-関数の根に付随したホロノミー系の局所コホモロジー解の計算, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理の新たな発展」, 京都大学, 2017年9月.

Katsusuke Nabeshima, Shinichi Tajima, Computing integral numbers for a parametric ideal in a ring of convergent power series via comprehensive Gröbner systems, Conferences on Applications of Computer Algebra 2017 (ACA 2017), the Jerusalem College of Technology, イスラエル, 2017年7月.

Shinichi Tajima, Katsusuke Nabeshima, An implementation of the Lê-Teissier method for computing local Euler obstructions, Conferences on Applications of Computer Algebra 2017 (ACA 2017), the Jerusalem College of Technology, イスラエル, 2017年7月.

鍋島克輔, 田島慎一, 収束冪級数環における integral number の計算法について, 第26回日本数式処理学会大会, 東邦大学, 2017年6月.

鍋島克輔, 田島慎一, 包括的グレブナー基底を用いた μ^* 列の計算について, Risa/Asir conference 2017, 金沢大学, 2017年3月.

鍋島克輔, 小原功任, 田島慎一, パラメータ付き Bernstein-Sato イデアルとホロノミーD加群, 日本数学会年会(函数論), 首都大学東京, 2017年3月.

Katsusuke Nabeshima, Computation method for μ^* -sequences of hypersurface isolated singularities, Topology of Singularity in Hanoi 2017, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Hanoi, Vietnam, 2017年2月.

鍋島克輔, 田島慎一, Tangent cone を用いた局所環でのパラメトリック・イデアルの次元判定, 2016年度日本数式処理学会合同分科会, 京都大学産連本部東京日本橋サテライトオフィス, 2017年1月.

鍋島克輔, 田島慎一, b-関数の因子チェックを用いたパラメトリック b-関数の計算 - μ -constant deformation の場合-, 京都大学数理解析研究所共同研究「数式処理とその周辺分野の研究」, 京都大学, 2016年12月.

田島慎一, 鍋島克輔, Base change

formula によるパラメータ付き多変数留数計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所共同研究「数式処理とその周辺分野の研究」, 京都大学, 2016年12月.

Katsuyoshi Ohara, Katsusuke Nabeshima, Shinichi Tajima, Comprehensive Gröbner systems in Poincare-Birkhoff-Witt algebra and Bernstein-Sato ideals, 京都大学数理解析研究所研究集会, 「超局所解析と特異摂動論の新展開」, 京都大学, 2016年10月.

小原功任, 鍋島克輔, 田島慎一, 包括的グレブナー基底とパラメータ付き b-関数の計算, 第10回玉原特殊多様体研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2016年9月.

鍋島克輔, 田島慎一, 局所コホモロジーを用いた μ^* 列の計算法について, 日本数学会秋期総合分科会(函数論), 関西大学, 2016年9月.

⑲ 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付きホロノミーD加群と b-関数 -- μ -constant deformation の場合--, 日本数学会秋期総合分科会(函数論), 関西大学, 2016年9月.

⑳ 鍋島克輔, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを用いた Limiting Tangent Space の計算法と比較, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理の新たな発展 - その最新研究と基礎理論の再構成 -」, 京都大学, 2016年9月.

㉑ 伊澤毅, 鍋島克輔, 田島慎一, Computer algebra and Bruce-Roberts Milnor numbers, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理の新たな発展 - その最新研究と基礎理論の再構成 -」, 京都大学, 2016年9月.

㉒ Katsuyoshi Ohara, Katsusuke Nabeshima, Shinichi Tajima, Comprehensive Gröbner systems for Parametric Poincare-Birkhoff-Witt Ideals, RIMS workshop, Algebraic Statistics and Symbolic Computation, RIMS, Kyoto University, 2016年7月.

㉓ 鍋島克輔, 田島慎一, パラメトリック局所コホモロジーを用いた μ^* 列の計算, 第25回日本数式処理学会大会, 福岡大学, 2016年6月.

㉔ 鍋島克輔, 小原功任, 田島慎一, 包括的グレブナー基底とパラメータ付き b-関数の計算, Risa/Asir conference 2016, 金沢大学, 2016年3月.

㉕ 鍋島克輔, 小原功任, 田島慎一, 変形パ

ラメータ付きホロノミーD-加群の計算法 --parametric Poincare-Birkhoff-Witt 代数の利用--, 日本数学会年会(函数論), 筑波大学, 2016年3月.

⑳ 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き対数的ベクトル場と Bruce-Roberts ミルナー数の計算, 日本数学会年会(函数論), 筑波大学, 2016年3月.

㉑ 田島慎一, 鍋島克輔, Limiting tangent spaces と local cohomology, 日本数学会年会(函数論), 筑波大学, 2016年3月.

㉒ 鍋島克輔, 田島慎一, グレブナー基底を用いた収束べき級数環上での拡張 ideal membership アルゴリズムについて, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理とその周辺分野の研究 - Computer Algebra and Related Topics」, 京都大学, 2015年12月.

㉓ 田島慎一, 鍋島克輔, 特異点の複素解析と局所コホモロジー, 第58回函数論シンポジウム, 島根大学, 2015年10月.

㉔ 田島慎一, 鍋島克輔, 超曲面に付随したホロノミーD-加群の計算アルゴリズムについて II, 日本数学会秋期総合分科会(函数論), 京都産業大学, 2015年9月.

㉕ 鍋島克輔, 田島慎一, 超曲面に付随したホロノミーD-加群の計算アルゴリズムについて I, 日本数学会秋期総合分科会(函数論), 京都産業大学, 2015年9月.

㉖ 田島慎一, 鍋島克輔, 局所コホモロジーを用いた Bruce-Roberts ミルナー数の計算法について, 日本数学会秋期総合分科会(函数論), 京都産業大学, 2015年9月.

㉗ 鍋島克輔, 田島慎一, 偏微分作用素環での包括的グレブナー基底とホロノミーD-加群, b-関数, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理研究の新たな発展」 京都大学, 2015年8月.

㉘ 田島慎一, 鍋島克輔, Bruce-Roberts ミルナー数の計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所共同研究, 「数式処理研究の新たな発展」 京都大学, 2015年8月.

㉙ Katsusuke Nabeshima and Shinichi Tajima, Logarithmic vector fields associated with hypersurface isolated singularities and local cohomology, Singularities in Generic Geometry and its Applications -Kobe-Kyoto 2015 (Valencia IV)-, Kobe University and Kyoto University, 2015年6月.

㉚ 鍋島克輔, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを用いたスタンダード基底の項順序変換について II, 第24回日本数式処理学会大会, 筑波大学, 2015年6月.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鍋島 克輔 (NABESHIMA, Katsusuke)
徳島大学・大学院社会産業理工学研究部
(理工学域)・准教授
研究者番号: 00572629

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

田島 慎一 (TAJIMA, Shinichi)
筑波大学・数理物質系(数学域)・教授