3版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 13 日現在

機関番号：17101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17514

研究課題名（和文）加群の鎖複体の構造解析

研究課題名（英文）A study on the structure of complexes of modules

研究代表者

岡崎　亮太（OKAZAKI, Ryota）

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：20624109

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：アフィン有向マトロイド M に付随して定まる有向マトロイドイデアル I, 及び, 有界複体 X, 並びに, I に付随して定まる単体的複体Δについて, I がコーエン=マコーレーならば, 「ホモロジー的」に閉球体であることを示した. また, 体上の多項式環の次数付き有限生成加群の自由分解を「直接的」に構成する方法を発見した.

研究成果の学術的意義や社会的意義
アフィン有向マトロイドに関する成果は, 有界複体 X がコーエン＝マコーレーならば X は閉球体であることを窺わせ, X. Dong 氏により肯定的に解決された Zaslavsky 予想の主張がより広いクラスでも成立することを示唆するものである.
加群 M の自由分解は, M の代数的性質を調べる為の重要な概念であり, 本研究で得られた自由分解の構成法は多項式環上の次数付き加群に関する研究への寄与が期待できる.

研究成果の概要（英文）：This research has revealed that if the bounded complex X of an affine oriented matroid M is Cohen-Macaulay, then X and the simplicial complex Δ associated with the affine oriented matroid ideal of M are ``homologically'' closed balls. In addition, I have discovered a ``direct'' way to construct a graded free resolution of a finitely generated graded module over a polynomial ring over a field.

研究分野：組合せ論的可換代数

キーワード：アフィン有向マトロイド　有界複体　極小次数付き自由分解

１．研究開始当初の背景

可換環論や組合せ論的可換代数において，加群の極小次数付き自由分解（以下，単に極小自由分解と呼ぶ）は，ベッチ数，Castelnuovo-Mumford 正則性といった主要な不変量を与える極めて重要な研究対象である．一方で，これらを具体的に計算することは非常に難しく，多くの関連する未解決問題がある．特に，アフィン整域について，Castelnuovo-Mumford 正則性の上限を与える Eisenbud-Goto 予想は，1984 年に提唱されて以来，一般の場合は広く未解決であり（注：本予想は 2017 年に J. McCullough 氏と I. Peeva 氏により否定的に解決された），アフィン半群環でも単体的という特別な例でさえ，予想が成立するかどうか完全には分かっていない．

組合せ論的可換代数の範疇において，上述の自由分解などのような，種々のホモロジーを計算する際に利用される鎖複体には CW 複体の幾何的・組合せ論的構造が付随することが度々ある．この様な CW 複体が付随する鎖複体を cellular 鎖複体と呼ぶ．2002 年に E. Bazies 氏と V. Welker 氏は，R. Forman 氏による離散モース理論を利用し，ホモロジーに寄与しない余分な部分を「潰す」ことで，ホモロジーを保ったまま cellular 鎖複体を「小さく」する画期的なアイデアを提唱した．この理論を利用することで，cellular 鎖複体のホモロジーを計算したり，極小ではない cellular 自由分解から，cellular 極小自由分解を得たりすることが出来る．研究代表者は，関西大学の柳川浩二氏と共同で「ボレル固定イデアルの極小自由分解が，Batzies 氏らの手法により求まること」を示し，更に，PL トポロジーの理論を利用して，「当該イデアルが Cohen-Macaulay ならば，その cellular 極小自由分解には PL 球体の分割により得られる CW 複体が付随すること」を示した．ボレル固定イデアルは，ジェネリック・イニシャル・イデアル等と関連を持つ組合せ論的可換代数で重要なイデアルのクラスである．一般のボレル固定イデアルの極小自由分解に対しては，いくつかの計算例から，多面体的複体が付随することを予想していたが，残念ながら，本問題については現在も未解決である．

一方，ごく最近，C. A. Francisco 氏らにより，あるボレル固定イデアルの極小自由分解 P とカタラン数との間に興味深い関連があることが示された．カタラン数は結合多面体や Stasheff 多面体と呼ばれる凸多面体の頂点数として現れることが知られており，上述の関連性は，P に付随する CW 複体が結合多面体の細分として得られる可能性を示唆している．結合多面体はホップ空間や団代数とも関連があることが知られており，この観点から見ても，当該関連性は非常に興味深い．

cellular 極小自由分解はアフィン有向マトロイドにも現れる．2002 年に I. Novik 氏らは，アフィン有向マトロイド M に対し，有向マトロイドイデアルなるイデアルを定め，その極小自由分解には M の bounded complex と呼ばれる CW 複体が付随することを示した．アフィン有向マトロイドは，アフィン超平面配置の一般化と捉えることが出来き，Novik 氏らの結果は，アフィン超平面配置 A の有向マトロイドイデアルの極小自由分解は，A の有界なセルからなる bounded complex が付随することを示している．

アフィン超平面配置の bounded complex はその定義から，一般には閉球体（の分割）になっていると考えられる．事実，1975 年に T. Zaslavsky 氏により，「generic に配置された」アフィン超平面配置の bounded complex は閉球体であることが予想されている． simple なアフィン超平面配置の場合には(より一般に，アフィン有向マトロイド M が uniform ならば)，2006 年に X. Dong 氏により，bounded complex が閉球体であることが示されているものの，約 40 年経過した現在も予想は未解決である．

２．研究の目的

本研究の目的は下記の通りである．

(1) ボレル固定イデアルの cellular 極小自由分解に付随する CW 複体の構造の決定を行う
(2) 有向マトロイドイデアルの cellular 極小自由分解に付随する CW 複体の構造の決定を行う
(3) アフィン半群環に対し，Eisenbud-Goto 予想を解決する

３．研究の方法

本研究と関連する可換代数，組合せ論，代数的位相幾何学，表現論等の分野の書籍や関連論文を読み進めることを中心に行い，情報収集や意見交換の為に，国内外問わず研究集会への参加・発表を行った．また，本研究と密接に関連する分野の研究者とは，特に，先方の大学を訪問したり，或いは，申請者の所属機関に招聘し，深い討論を行い研究推進に役立てた．

本研究の中心的な対象である極小自由分解を具体的に手計算で求めることは，一般に極めて困難であることから，コンピューターを利用して具体例の計算等を行い，研究推進に活用した．また，研究で得られた結果の検証にも利用した．

４．研究成果

「研究の目的」の（2）に関する研究成果として，関西大学の柳川浩二氏との共同研究により，次の成果を得た．

(1) M に付随する有向マトロイドイデアル I による剰余環 R が Cohen-Macaulay のとき，R の標準加群は R のイデアルであることを示し，更に，その生成系を具体的に求めることに成功した．
(2) (1) の系として，アフィン有向マトロイド M の bounded complex X が Cohen-Macaulay ならば，X は境界をもつホモロジー多様体であり，X の各局所ホモロジーのトップホモロジーの次元は 0 または 1 であること，更に，X の境界は境界をもたないホモロジー多様体となることを示した．
(3) R が Cohen-Macaulay のとき，R に付随する単体的複体Δ（X とは異なる）も境界をもつホモロジー多様体であり，更に，その境界のホモロジー，局所ホモロジーは共に球面のものと同じになることを示した．

（2）の成果は X が Cohen-Macaulay ならば，ホモロジー的に X は大域的にも局所的にも閉球体と同じことを意味しており，「X が Cohen-Macaulay ならば，X は閉球体であること」，特に，Dong 氏による「M が uniform ならば X は閉球体である」事実について，M がより広いクラスでも X は閉球体となることを示唆するものである（M が uniform ならば X は Cohen-Macaulay であり，逆は不成立）．R（或いは I）が Cohen-Macaulay ならば，X も Cohen-Macaulay となるので，もし上述の主張が正しいならば，「研究開始当初の背景」で述べた研究代表者と柳川浩二氏による定理「ボレル固定イデアルが Cohen-Macaulay ならば，その cellular 極小自由分解には PL 球体（よって，閉球体）の分割により得られる CW 複体が付随する」の類似の主張がアフィン有向マトロイドイデアルについても成立することを意味する．

残念ながら，当該主張が正しいか否かを確定することは出来なかったが，X の次元が 2 以下の場合，また X の次元が 3 次元で，かつ，対応する有向マトロイド M がアフィン超平面配置から得られるものである場合には正しいことを示した．更に，X が 4 次元の場合は，少なくとものX が位相多様体になることを確認した．

（3）の成果について，ΔとXには直接的な繋がりはなく，研究代表者が知る限り，両者の関係性に注目した研究はこれまでなされていなかったが，ΔはR（或いは，有向マトロイド M の有向マトロイドイデアル I）自身に付随して定まり，後者はR の極小次数付き自由分解に付随するという点で代数的な繋がりがある．R が Cohen-Macaulay ならば（このとき，X も Cohen-Macaulay となる），両者の幾何的な構造に類似点があることは非常に興味深く，有向マトロイドイデアルや bounded complex に関する新たな方向性の研究の可能性を秘めている．

以上の成果は論文として纏め，Journal of Combinatorial Theory, Series A に掲載された．

「研究の目的」(1)，(3) と関連する研究の成果として，体 K 上の多項式環 S 上の Z 次数付き有限生成加群 M に対し，M から直接的に M の自由分解 P を構成する方法を発見することができた．当該構成法は，これまでに知られていたグレブナー基底を用いて P を構成する S-自由加群を逐次的に求めるものではなく，M の K-線形空間としての基底を用いて P の各自由加群を記述することで得られるものであり，M の極小次数付き自由分解の構成や構造の解析への応用が期待できる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1　件）
① Ryota Okazaki, Kohji Yanagara, The Cohen-Macaulayness of the bounded complex of an affine oriented matroid, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 157 (2018), pp. 1-27，査読有，DOI: 10.1016/j.jcta.2018.01.004

〔学会発表〕（計　3　件）
① Ryota Okazaki, The bounded complex of an affine oriented matroid and its Cohen-Macaulayness, International Conference and 8th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2016
② 岡崎亮太，多項式環上の Z-次数付き有限生成加群の Z-次数付き自由分解の構成について，日本数学会 2016 年度秋季総合分科会，2016 年
③ 岡崎亮太，柳川浩二，アフィン有向マトロイドの bounded complex の Cohen-Macaulay 性とマトロイド・イデアルの Cohen-Macaulay 性，日本数学会 2015 年秋季総合分科会，2015 年

６．研究組織

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。