

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：82401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17518

研究課題名(和文) 総実体上の数論への志村多様体の幾何の応用の新展開

研究課題名(英文) New applications of the geometry of Shimura varieties to number theory on totally real number fields

研究代表者

高井 勇輝 (Takai, Yuuki)

国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・特別研究員

研究者番号：90599698

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、総実体上の保型形式を用いて整数論の問題に応用する手法を考察することや、総実体上の保型形式が定義される志村多様体の幾何学的性質、代数的性質に関する研究を行った。その成果として、総実体上の半整数ウエイトの保型形式を用いて、総実体上の総虚二次拡大における相対類数や保型L-関数の特殊値に関する漸近挙動について解析した。またCM体上の四元数環で乗法を持つ有限体上のアーベル多様体の自己準同型環の構造を決定した(新井啓介氏との共同研究)。これにより、総実体上の志村曲線の有理点問題に関する基本的な部分を明らかにし、Galois 表現を用いたより精密な分析への基礎を固めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有理数体上の問題から総実体上の問題に拡張する際に生じる単数群や類数による障害をどのように回避するかに関する技術的な手法が幾つか得られた。また、四元数環による乗法を持つアーベル多様体の自己準同型環の構造に関する結果は、その先にある志村曲線の有理点問題の精密化のための土台となる。これらの研究を通して、総実体上の保型形式や志村多様体の性質についての理解が深まり基盤が固められたと考えている。特に研究期間の終盤において、本研究に密接に関連する挑戦的な共同研究を幾つか開始することができた。これらの今後の研究を介して成果として還元する。

研究成果の概要(英文)：In this research, we consider a method of applying the modular forms for totally real fields to problems of number theory, and study the geometric and algebraic properties of Shimura varieties. As a result, using the Hilbert modular form of half-integer weights, we analyze the asymptotic behavior of the relative class numbers and the special values of the modular L-functions. We also determine the structure of the endomorphism rings of the Abelian varieties over finite fields with multiplication of quaternion algebras over a CM fields (joint work with Keisuke Arai). This study clarified the fundamental part of the rational point problem of Shimura curves on total real number fields. We have laid the groundwork for a more precise analysis using the Galois representation.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 半整数ウエイト保型形式 アーベル多様体 志村曲線 有理点問題 自己準同型環

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年発展していた保型形式の整数論への応用に関する研究は、多くの場合最も素朴な1変数保型形式を用いるものが多く、類数の非可除性などの基本的な整数論の問題への応用に関しても有理数体を基礎体としたものに限られていた。

(2) 有理数体の自然な拡張にあたるものとして総実体と呼ばれるものがある。総実体上の保型形式は総実体上の四元数環の乗法群に付随する志村多様体上の微分形式として定義される。これまでに数論幾何学的側面についてよく研究されてきた対象であるにも関わらず、これらの総実体上の整数論の素朴な問題への応用はあまり行われていなかった。そこには、素因数分解の一意性の崩れや、単数群の構造などからくる技術的なことに起因する要因があった。

2. 研究の目的

(1) 総実体上の保型形式は、四元数環の選択によって異なる保型形式が実現され、変数や q -展開の有無など性質も異なる。これらの異なる保型形式は Jacquet-Langlands 対応と呼ばれる Hecke 作用素と可換な対応により結びついている。特にこの四元数環の選択の自由度を活用し、各問題の用途に応じて、それに適した選択を行い応用すること、またはそれを可能にするための理論的基盤を固めることが主な目的であった。

(2) 応用に関する一つの例として、総実体上の四元数環である2次行列環に対する保型形式である Hilbert モジュラー形式の半整数ウエイトのものをを用いて総実体上の整数論に関する問題に応用する。また別の例として、総実体の一つの無限素点でのみ分岐する四元数環に対応する保型形式を用いた保型形式の決定条件などを見出す。

(3) また理論的基盤を固めるために、それら四元数環の乗法群に付随する志村多様体の幾何学的性質について、理解を深めるとともにまだ知られていない性質を解明する。

3. 研究の方法

計算機による例の計算や考察を個人で行い、また共同研究者との打ち合わせを通して、研究を行った。

4. 研究成果

(1) 半整数ウエイトの Hilbert モジュラー形式で、特に Eisenstein 級数であるものの係数に相対類数が出現する現象を用いた総実体上の相対類数の非可除性に関する論文が雑誌に掲載された。また、Eisenstein 級数でなく Hecke 固有力スプ形式を用いることによる Hilbert モジュラー形式に付随する L -関数の中心値の $\text{mod } p$ での非零性に関して、強い仮定の下での結果が得られている。そのため、仮定を満たすものが存在することを計算機により確認する必要がある。これとその仮定を緩めることを並行して行い、いずれかが達成され次第、論文としてまとめ arXiv に公開し、論文誌に投稿する。

(2) 総実体上のモジュラーなアーベル多様体に対する Manin 定数を newform の正規化とそのアーベル多様体の Neron モデルを取ることからくる正規化のズレとして定義し、その良い素点での位数が一致することを証明した。現在、レベルを割る素点における性質に関して改良を加えている。それが完了し次第、プレプリントとしてまとめ arXiv に公開し、論文誌に投稿する。

(3) 志村多様体の性質の解明に関する研究として、CM 体上の四元数環による乗法をもつ有限体上のアーベル多様体の自己準同型環の構造が乗法を与える四元数環とどのように関係づいているかを Brauer 群の言葉で記述することに成功した。これは新井啓介氏(東京電機大)との共同研究である。総実体の一つの無限素点のみで分解する四元数環の乗法群に付随する志村多様体は1次元、特に曲線であり、志村曲線と呼ばれている。この志村曲線の有理点についての大まかなことはこの事実からわかる。本結果については、プレプリントとしてまとめており、共同研究者による確認が終わった時点で arXiv に公開、論文誌に投稿する予定である。

本研究の動機は志村曲線の有理点に関する Hasse 原理の反例の構成であったが、アーベル多様体の定義体とモジュライ体の関係に関するある定理を証明することが達成されれば、ここで得られた結果を Galois 表現による議論と関連付けることができる。その意味で、四元数環による乗法を持つアーベル多様体に関して理解しておくべき基本的な性質を調べたことになる。

(4) 本研究期間においては、理解を深める、基盤を固める、ということに重点をおくことになり、その意味ではある程度達成されたと考えている。それらが実を結び、研究期間の終盤に、これらの研究に関連するいくつかの挑戦的な共同研究が開始された。例えば、岩澤不変量に関する消滅の総実化に関する研究(山本修二氏(慶応)、三浦崇氏(鶴岡高専)との)や志村多様

体の悪い還元とラマヌジャングラフの関係と応用に関する研究(田中亮吉氏(東北大学), 三内顕義氏(理研 AIP)との)などを開始した。その点でも今後の研究を通して具体的成果として還元できると確信している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takai Yuuki	4. 巻 186
2. 論文標題 Indivisibility of relative class numbers of totally imaginary quadratic extensions and vanishing of these relative Iwasawa invariants	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 162 ~ 179
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2017.09.024	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 Hilbert モジュラー形式に付随する L-関数の中心値の mod p nonvanishing
3. 学会等名 愛知数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 Hilbert モジュラー形式の計算
3. 学会等名 第25回整数論サマースクール（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 保型 L-関数の中心値の mod p での非零性問題への 半整数ウエイト保型形式の応用
3. 学会等名 香川セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 類数の非可除性問題への跡公式の応用
3. 学会等名 香川セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuuki Takai
2. 発表標題 The Manin constants for Hilbert modular forms
3. 学会等名 The workshop "Modular forms and period integrals"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 Manin 定数の総実化について
3. 学会等名 北陸数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 Manin 定数の総実化について
3. 学会等名 代数セミナー
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Yuuki Takai
2. 発表標題 On non-vanishing modulo p of central values of L-functions over totally real fields
3. 学会等名 Boston-Keio workshop (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 高井 勇輝
2. 発表標題 CM 体の相対類数の非可除性に関するこれまでのことと今後のこと
3. 学会等名 北陸数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----