

令和元年6月13日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17520

研究課題名(和文) 対称性を持つK3曲面の総合的研究

研究課題名(英文) Studies of K3 surfaces with symmetry

研究代表者

瀧 真語 (Taki, Shingo)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：30609714

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体の自己同型を調べることは基本的な問題である。特にK3曲面の自己同型を調べることは重要である。K3曲面は至る所消えない正則2形式を持つが、K3曲面に作用する有限群はそれへの作用によって「シンプレクティック」または「非シンプレクティック」と呼ばれる。この研究ではK3曲面の位数16の非シンプレクティック自己同型の分類や指数7の対数的エンリケス曲面の研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学的対象を考察する際、それが持つ対称性に注目することで新たな世界が見えてくることがある。例えば、一般の三角形に対称性は無いが、二等辺三角形や正三角形のような特殊な三角形は「左右対称」や「120度の回転」など特別な対称性を持つ。二等辺三角形や正三角形の特殊性はこのような対称性の存在によって特徴付けられているとも言える。本研究のように対称性を表す自己同型を通して代数多様体を調べることで、新たな知見が得られた。

研究成果の概要(英文)：It is a fundamental problem to study automorphisms of algebraic varieties. In particular, studies on automorphisms of K3 surfaces are one of the important problems. By the definition of K3 surfaces, these have a nowhere vanishing holomorphic 2-form. A finite group which acts on K3 surfaces as automorphisms is called "symplectic" or "non-symplectic" if it acts trivially or non-trivially on a nowhere vanishing holomorphic 2-form, respectively. In the research, we classify complex K3 surfaces with non-symplectic automorphism of order 16 in full generality, study log Enriques surfaces of index 7.

研究分野：代数幾何

キーワード：K3曲面 自己同型 対数的有理曲面

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代数多様体の対称性を表す自己同型の研究は本質的で重要なものとされているが、K3 曲面の非シンプレクティック自己同型は Nikulin をパイオニアとし、多くの数学者によって調べられていた。

非シンプレクティック自己同型の分類に関しては素数位数の場合に Nikulin, 小木曾, Zhang, Artebani, Sarti, 研究代表者らによって、ネロン・セベリ格子への作用が自明な場合は金銅, 研究代表者らによって知られていた。また自己同型の位数がある程度大きな場合には、分類を行う上で重要な固定点集合は明示されてはいなかったが、そのような自己同型を持つ K3 曲面の一意性は金銅, Xiao らによって知られていた。一般的な合成数位数や素数べき位数の場合はあまり調べられていない。

### 2. 研究の目的

特別な対称性によって統制される K3 曲面を調べる。特に

- (1) K3 曲面が唯一に定まるような特別な対称性の決定
  - (2) K3 曲面が持つ非シンプレクティックな対称性の分類
- が目的である。より詳しくは以下である。

(1) では主に非シンプレクティック自己同型を持つ K3 曲面を想定して研究を進める。一般に位数が大きな非シンプレクティック自己同型は K3 曲面の一意性を導きやすいが、実際にどのような位数が一意性を導くのかは不明である。まずはこの問題を明らかにし、同時にそのような自己同型を持つ K3 曲面の定義方程式を書き下す。そしてネロン・セベリ格子や自己同型の局所的な作用の仕方なども含め、幾何構造を明らかにする。(2) については非素数位数の自己同型を調べることになるが、特に小さな位数について考察する。(位数が大きな場合は(1)になる) 自己同型の固定点集合を記述し、K3 曲面のネロン・セベリ格子の言葉と対応付ける。またこのような自己同型を持つ K3 曲面の具体例を構成する。

### 3. 研究の方法

K3 曲面が有限位数  $l$  の非シンプレクティック自己同型を持つという条件から K3 曲面の幾何学にかなり強い条件が課せられる。特に周期領域の次元を  $l$  から計算することができるので、非シンプレクティック自己同型を持つ K3 曲面のジュライ空間の次元が 0 になるような  $l$  をリストアップすることが可能である。2.(1) を目標とした場合はこのリストアップがスタート地点となる。その後は各位数毎に研究方法は変わるが、基本的には自己同型の固定点集合に注目し、1つの K3 曲面に複数の自己同型が作用する可能性が無いことを示していく。実際「K3 曲面が複数現れて、一意性がない」というケースよりも「K3 曲面は1つだが、複数の自己同型が存在する」というケースの方が多い。

ある程度大きな位数の自己同型は一意性の問題として現れるため、2.(2)では(1)で扱う位数よりも小さな位数を扱う。実際に調べる自己同型の位数よりも小さな(素数)位数の自己同型の分類結果、レフシェッツの固定点形式や楕円曲面論などを用いることで、与えられた自己同型の固定点集合を決定する。

このような方法で研究を進めながら、より深い理解を得るためにセミナーや研究集会を開催し、その中で議論・討論を行いつつ、新たな視点や問題意識を得ながら研究を進めた。

### 4. 研究成果

2(1)の「K3 曲面が唯一に定まるような特別な対称性の決定」に関しては海外の研究者とも共同で研究を進めていたが、残念ながら我々よりも一足早くドイツ人の若手研究者によってプレプリントが発表された。

ただ、この研究を行っていた時に派生した問題として、対数的エンリケス曲面に関する考察を行なった。対数的エンリケス曲面は K3 曲面の非シンプレクティック自己同型による商曲面に適当な操作を加えた曲面として得られる。また対数的エンリケス曲面から然るべき特異点解消を(何度か)取ることによって、非シンプレクティック自己同型を持つ K3 曲面が得られる。そのような対数的エンリケス曲面にある特異点を課したとき、その特異点がどれほど対数的エンリケス曲面の幾何を統制するか?という話である。特に(標準因子のカルティエ)指数が7で  $A_{15}$ 型の特異点を持つ対数的エンリケス曲面を考察した。これに関しては結果をまとめ、現在論文を投稿中である。

2(2)の「K3 曲面が持つ非シンプレクティックな対称性の分類」では Dima Al Tabbaa 氏, Alessandra Sarti 氏(ともにボワティエ大学の所属)と共に、位数 16 の非シンプレクティック自己同型を調べた。位数 16 の「ネロン・セベリ格子に自明に作用する」非シンプレクティック自己同型はこれまでに調べられたことがあるが、この研究は完全に一般的な仮定の下で自己同型を分類したものである。基本的にこの手の研究のゴールは固定点集合を完全に記述し、それとネロン・セベリ格子との関係を見ると言ったものである。今回の場合、固定点集合は有理曲線と孤立点(局所的な作用は色々ある)のみが現れる。またネロン・セベリ格子の階数であ

る,ピカル数は6と14の2種類である.そしてK3曲面上の位数16の非シンプレクティック自己同型はピカル数6の場合に2種類,ピカル数14の場合に5種類の計7種類に分類された.ただし「K3曲面のピカル数が14で,自己同型の固定点集合が1つの有理曲線と10個の孤立固定点である」という場合だけ具体的な例を構成しきれなかったが,後にJimmy Dillies, Example of an order 16 non-symplectic action on a K3 surface. J. Algebra 458 (2016), 216-221.に依って与えられた.

K3曲面の非シンプレクティック自己同型の位数のうち,2ベキのものは2,4,8,16,32であるが,この論文の登場によって,未解決部分は4と8のみになった.これらの場合を調べることは素朴な興味としても意味のあることだと思われるが,特に位数4の場合が大切である.上で述べた対数的エンリケス曲面などの話題とぶつかり,今後の展望が期待される.なお,位数16の研究においても位数4や位数8の自己同型の考察は必要になるのだが,今回の場合はそれらの未解決部分にぶつかることはなかった事を注意しておく.

3で述べた研究集会等の開催であるが,具体的には2015年8月17日から19日には「第3回 K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ」を,2016年10月10日から12日には「第4回 K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ」を,2017年8月22日から24日には「第5回 K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ」を,何れも北海道教育大学・札幌駅前サテライトにて開催した.2018年にも同様の研究集会を9月10日から12日の日程で計画していたが,北海道胆振東部地震のために中止した.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1件)

1. Dima Al Tabbaa, Alessandra Sarti, and Shingo Taki, Classification of order sixteen non-symplectic automorphisms on K3 surfaces, J. Korean Math. Soc. 53 (2016), no.6, 1237--1260. (査読あり) <http://dx.doi.org/10.4134/JKMS.j150339>, pISSN: 0304-9914 / eISSN: 2234-3008

〔学会発表〕(計 10件)

1. 瀧 真語, K3 surfaces and log rational surfaces, 可積分系理論から見える数理解析とその応用, 京都大学数理解析研究所, 18/9/5--7.
2. S.Taki, Non-symplectic automorphisms of K3 surfaces, K3 Surfaces and Related Topics, Nagoya University, 17/12/19--21.
3. 瀧 真語, K3曲面と対数的有理曲面, 東工大数論・幾何学セミナー, 東京工業大学, 17/11/10.
4. 瀧 真語, K3曲面と対数的有理曲面, 東京電機大学数学講演会, 東京電機大学, 17/10/31.
5. S.Taki, Uniqueness of K3 surfaces with non-symplectic automorphisms, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016, Hakodate Arena, 16/5/30--6/1.
6. 瀧 真語, Automorphisms of K3 surfaces which act trivially on Picard groups, 代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学, 16/3/10--11.
7. S.Taki, On uniqueness of K3 surfaces with non-symplectic automorphisms, Arithmetic and Algebraic Geometry 2016, The University of Tokyo, 16/1/25--28.
8. 瀧 真語, K3 surfaces with non-symplectic automorphisms, 第3回 代数幾何学研究集会-宇部-, 宇部高専, 16/1/9--10.
9. 瀧 真語, 非シンプレクティック自己同型を持つK3曲面の一意性, 第3回 都代数学研究集会, 福岡大学, 15/11/25--27.
10. 瀧 真語, 大きな位数の自己同型を持つK3曲面, 第9回 玉原特殊多様体研究集会, 玉原国際セミナーハウス, 15/8/24--27.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.sm.u-tokai.ac.jp/~taki/>

## 6 . 研究組織

(1)研究分担者

無し

(2)研究協力者

無し

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。